Eléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve du 13 mars 2003

Exercice 1 : Pause café

Le plus simple est de **mettre toute la monnaie en commun**.
On dispose alors de : **1€ + 50 ct + 3× 20 ct + 2×10 ct + 2× 5 ct**
On commence par acheter 2 cafés en introduisant
2 × (20 ct + 10 ct + 5 ct)
On achète un 3° café en introduisant 50 ct. La machine rend 10 ct + 5 ct . On rend 5 ct à Daniela et 10 ct à Bernardo
On achète le 4° café en introduisant 1€ la machine doit rendre 0,65 € .
Elle n'a qu'une façon pour le faire: rendre 50 ct + 10 ct + 5 ct.
On donne 5 ct à Claudia, encore 10 ct à Bernardo, et à Alberto 50 ct plus les 20 ct non utilisés. **Alors chacun a son café et sa monnaie**.

Exercice 2 : Au suivant

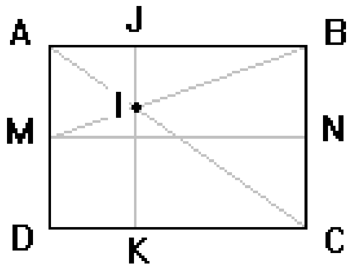
L'unique solution est :
6+7+8+9+10 = 40

On ne demande pas de démontrer l'unicité de la solution.

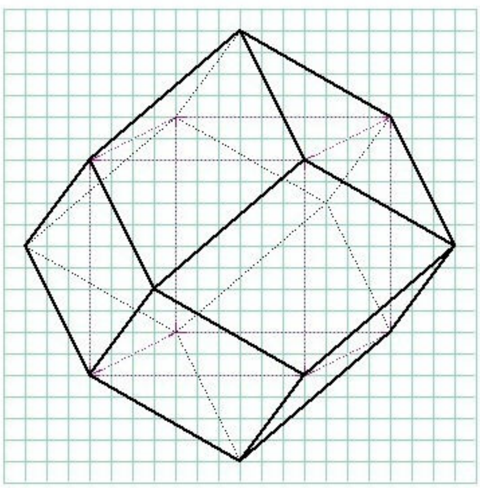
Exercice 3 : Tripli

On pourra nommer les points comme ci-contre :
Avec les triangles AIM et CIB,
Thalès donne : AI/IC = AM/CB = 1/2
Donc IC = 2 AI et AC = 3AI
Avec les triangles AIJ et ACB,

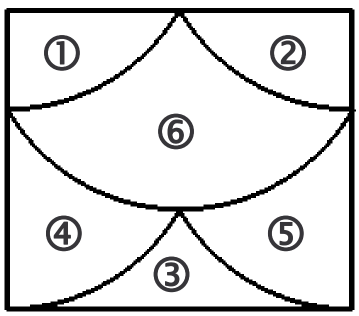
Thalès donne alors : $\boxed{\mathbf{AJ} = \frac{1}{3}\ \mathbf{AB}}$



Exercice 4 : Rhombique



Exercice 5 : C'est pas pi



Voici le rectangle :
Sa longueur est $6 \times \sqrt{3}$ cm
Sa largeur est 1,5 × 6 = 9 cm

D'où son aire : $\boxed{\mathbf{54\ \sqrt{3}\ cm^2}}$

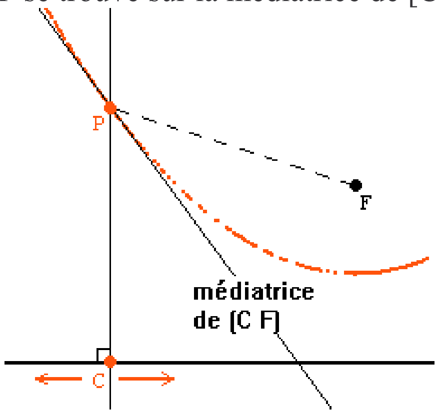
Exercice 6 : Le 11 gagnant… est 9876524130 .

Pour le trouver, on remarque d'abord que 9876543210 n'est pas un multiple de 11,
car 9 – 8 + 7 – 6 + 5 – 4 + 3 – 2 + 1 = 5, puis on le modifie le moins possible, en partant de la droite… du bon bricolage !

Exercice 7 : A la ficelle

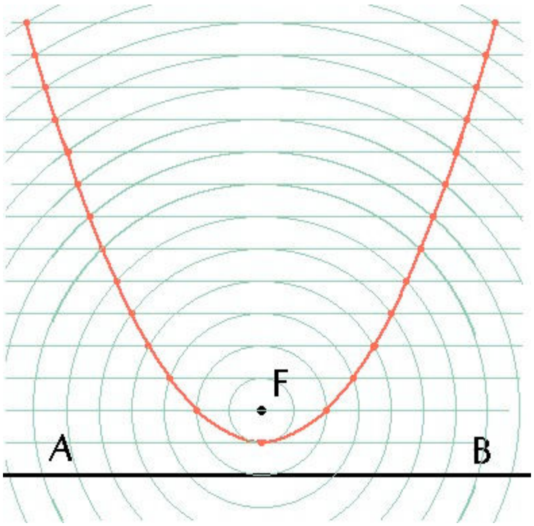
- D'une part **PF = 14 – DP** puisque la ficelle est tendue
- et d'autre part **PC = 14 – DP** puisque les points D, P et C sont alignés

d'où l'égalité **PF = PC**
Cette égalité peut être exploitée pour le tracé : P se trouve sur la médiatrice de [CF]



Autres méthodes :

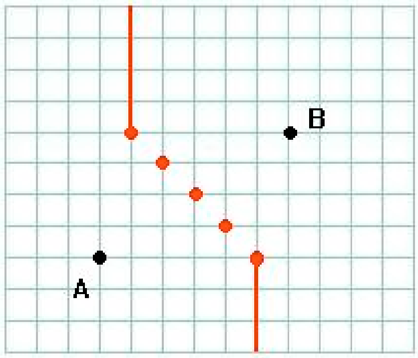
- Choisir les points convenables dans un réseau de cercles et de droites.



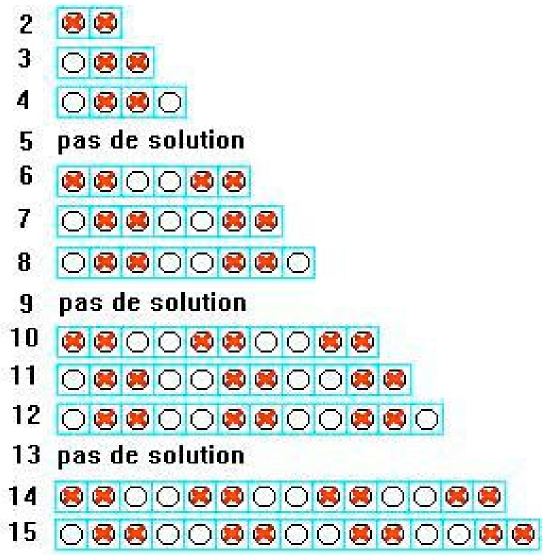
- Se débrouiller avec une ficelle etc.. comme Kepler !

Exercice 8 : Police Geometry

Dans cette géométrie, on obtient une curieuse *médiatrice*, constituée de deux demi-droites et 3 points isolés.



Exercice 10 : Black blanc bloque

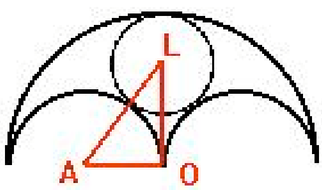


Il semble que les alignements n'ayant pas de solution soient ceux dont le nombre de jetons est de la forme 4n + 1, mais c'est assez difficile à démontrer.

Par contre, il est plus facile d'établir qu'un alignement de 2003 jetons peut être retourné : on commence par la gauche, on retourne les 2000 premiers jetons **par groupes de 4** suivant la solution ligne 4, puis on retourne les 3 derniers suivant la solution ligne 3.

Exercice 9 : Cadran lunaire :

Le disque lunaire est tangent aux 3 demi-cercles. Soit R son rayon. Alors, dans le triangle AOL :
OA = ½ : AL = ½ + R et
OL = 1 – R.



Ce triangle étant rectangle pour des raisons de symétrie, Pythagore donne :
$(½ + R)^2 = (½)^2 + (1-R)^2$
d'où R = 1/3 et $\boxed{\mathbf{D = 2/3}}$

Exercice 11 : Les voyages forment la jeunesse :

La formule $T_A = T_B \times \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ donne $20 = 40 \times \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ alors $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = ½$

donc : $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$ et $v^2 = \frac{3c^2}{4}$.

Finalement : $v = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ soit $\boxed{\text{environ 260 000 km/s.}}$

Exercice 12 : Partie de Boule

Si on note a l'arête du cube, sa grande diagonale est $a\sqrt{3}$.
Elle est aussi égale au diamètre de la boule d'où : $a = 74 / \sqrt{3} = 74\sqrt{3} / 3$
Le diamètre des cercles égale la diagonale des faces du cube, c'est à dire :

$$d = a \times \sqrt{2} = 74 \times \sqrt{6} / 3$$

Alors le rayon de ces cercles est , en millimètres : $\boxed{R = \frac{37\sqrt{6}}{3}}$

Exercice 13 : Quadrature

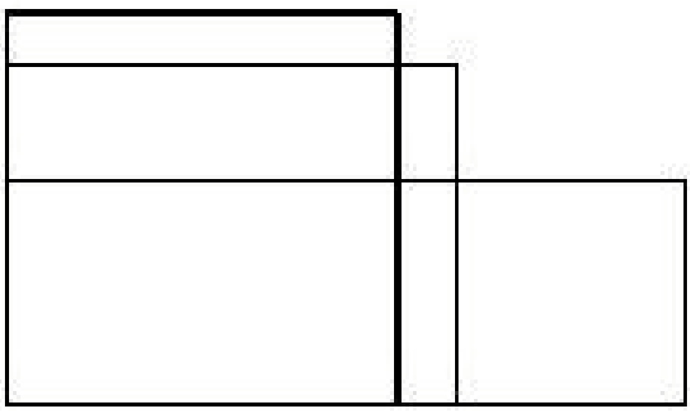
Notons (L_n) la suite des longueurs et (l_n) la suite des largeurs.
On a $L_0 = 9$, $l_0 = 3$ l'aire du premier rectangle est $9 \times 3 = 27$.

Alors :

$$L_1 = \frac{9+3}{2} = 6 \qquad l_1 = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$L_2 = \frac{6+\frac{9}{2}}{2} = \frac{21}{4} = 5,25 \qquad l_2 = \frac{27}{\frac{21}{4}} = \frac{36}{7} \approx 5,1428$$

$$L_3 = \frac{\frac{21}{4}+\frac{36}{7}}{2} = \frac{291}{56} \approx 5,1964 \qquad l_3 = \frac{27}{\frac{291}{56}} = \frac{504}{97} \approx 5,1958\ldots$$



Les 2 derniers rectangles sont presque confondus.
Le rectangle se rapproche vite d'un carré.
La longueur et la largeur se rapprochent d'une valeur commune qui serait le côté de ce carré, soit $\sqrt{27}$.
La calculatrice donne $\sqrt{27} = 3\sqrt{3} \approx 5,1961$.