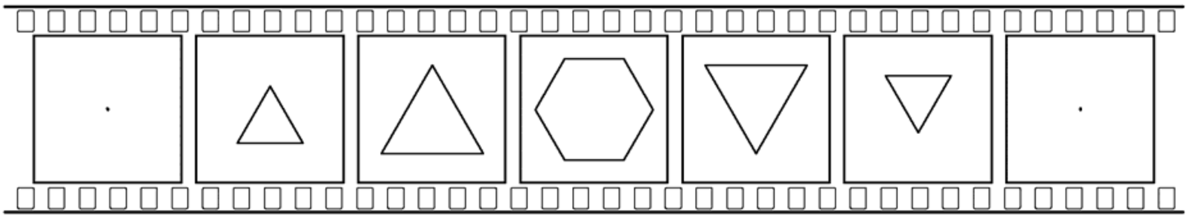
Eléments de solutions pour un corrigé de l’épreuve de Février 2008

Exercice 1 : *Courage, fuyons !*

Sophie et Antoine mettent respectivement 20 min et 10 min pour traverser, il est donc clair qu’il faut les faire passer ensemble. Mais il faut d’abord préparer ce passage pour que la lanterne puisse rapidement revenir. D’où la solution :
Juliette et Romain traversent en 2 min, Juliette* revient en 1 min, puis Sophie et Antoine traversent en 20 min. Alors Romain* revient chercher Juliette* 2min + 2 min.
Total 27 min. (*on peut aussi échanger les rôles de Romain et Juliette, avec le même total)

Exercice 2 : *Le plat pays*



Pour info : le côté de l’hexagone égale celui des petits triangles et la moitié de celui des grands.

Exercice 3 : *Réflec’tif*

Sur l’illustration, l’horloge indique 12 :00 donc Roselyne s’est trompée à 11 :51. Voici cette solution et les deux autres :

Exercice 4 : *Pour les flèches*

Le total des points marqués est 243. Chaque archer a donc marqué 81 points.
La seule répartition possible est : 25 + 25 + 25 + 3 + 3 = 81 pour l’un,
et pour les deux autres archers : 50 + 15 + 9 + 6 + 1 = 81.

Exercice 5 : *Prise de têtes*

Le chevalier peut vaincre le dragon présenté sur le dessin, par exemple comme ceci :

Oreilles	1	2	1	2	1	0	1
Becs	2	1	2	1	0	1	0
Gueules	4	3	2	1	2	1	0

En revanche, il y a trois types de dragons à 7 têtes qui sont invincibles : le 1,1,5 ; le 1,3,3 et, bien sûr, le 007 !
(Plus généralement, la théorie des dragons polycéphales établit que les dragons invincibles sont ceux dont les nombres de têtes des trois sortes ont la même parité et, bien sûr, les dragons de type 0,0,n.)

Exercice 6 : *A voté*

Voici deux solutions possibles :

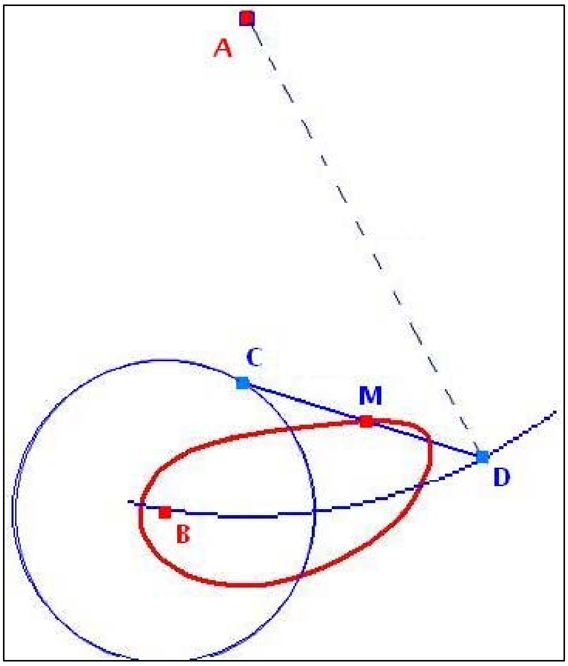
A) Si Julien avait repris la moyenne, elle aurait été inchangée. Il a ajouté un point pour qu’elle augmente de 0,02 point, soit 1/50 de point.
Son point supplémentaire a donc été divisé par 50 (nombre total de votants) donc 49 personnes ont voté avant lui.

B) Mise en équation : soit M la moyenne avant son vote et n le nombre de votants

On a : $\dfrac{nM+(M+1)}{n+1}=M+0,02$

L’inconnue M disparaît en cours de résolution et on trouve n = 49.

Exercice 7 : *Pour transpirer*



Exercice 8 : *Croissez et multipliez*

Deux populations sont clairement comparables pour des multiples communs de leurs « périodes ». (voir tableau)

Heures	6	10	12	24	30
A	8	32	64	4096	32768
B	9		81	6561	59049
C		25			15625

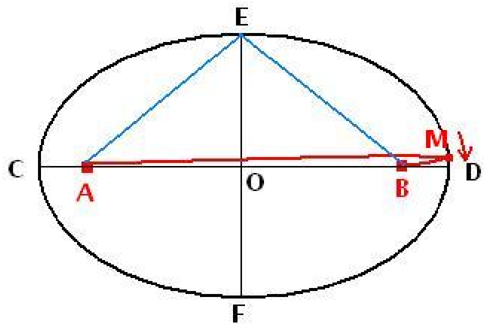
Après 24 h le classement est déjà bien établi : il faudrait attendre 25 heures pour que C = 3125.

Après 30 heures, on a $5^6 < 2^{15} < 3^{10}$
Le classement est alors $\boxed{C < A < B}$.

Remarque :
En calculant successivement $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ et $\sqrt[5]{5}$ on voit que les populations A, B, C augmentent respectivement d'environ 41,4%, 44,2% et 38% par heure.

Exercice 9 : *A la ficelle*

Soient A et B les piquets, [CD] et [EF] les axes de l'ellipse, O son centre, ℓ la longueur de la ficelle et M le point mobile. Pour trouver le bon paramétrage de l'ellipse, il faut imaginer M dans diverses positions :

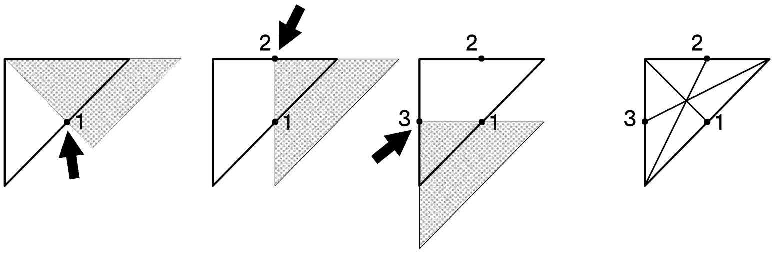


a) Si M est en C ou en D, on a :
$\ell = 2AC + AB = AB + 2BD$ donc $AC = BD$ et
$\ell = CD$ donc $\boxed{\ell = 15 \text{ m}}$.

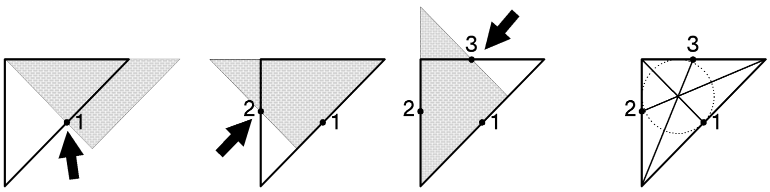
b) Si M est en E, on a $AE = \dfrac{l}{2} = 7{,}5$ m et, sachant que OE = 4,5 m l'égalité de Pythagore dans le triangle rectangle AOE donne AO = 6 m donc $\boxed{AB = 12 \text{ m}}$.

Exercice 10: *D'équerre*

Centre de gravité
Le triangle étant isocèle, la médiane issue de l'angle droit est aussi sa bissectrice (ou sa hauteur). La réciproque du théorème des milieux dans le triangle permet de valider l'obtention des milieux des autres côtés comme montré sur la figure ci-contre.

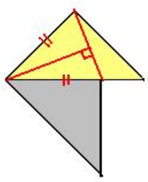


Centre du cercle inscrit
Il s'agit de tracer les bissectrices des angles. Pour celle de l'angle droit, c'est simple. Pour les autres on pourra remarquer que la bissectrice d'un angle est aussi son axe de symétrie.



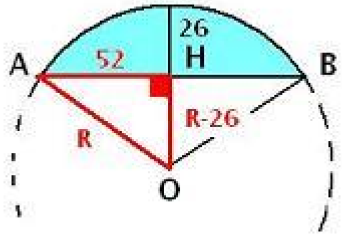
Remarque : il y a d'autres solutions pour ces constructions.

On peut par exemple tracer une bissectrice comme ceci :



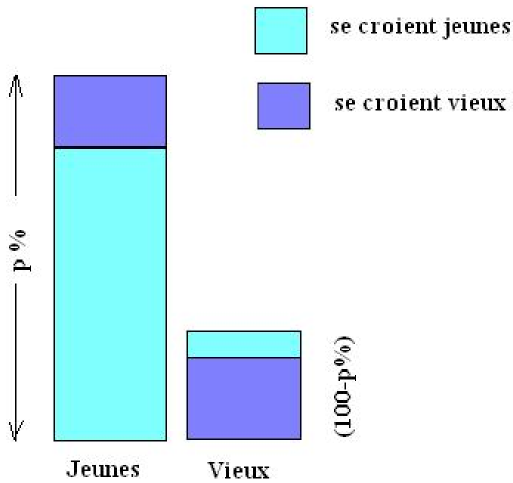
Exercices « Spécial Secondes »

Exercice 11 : *Dame de carreau*



Soit O le centre de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et (OH) la médiatrice de la corde [AB].
L'égalité de Pythagore dans le triangle rectangle OHA donne : $R^2 = (R-26)^2 + 52^2$
La résolution de cette équation donne $\boxed{R = 65 \text{ cm}}$.

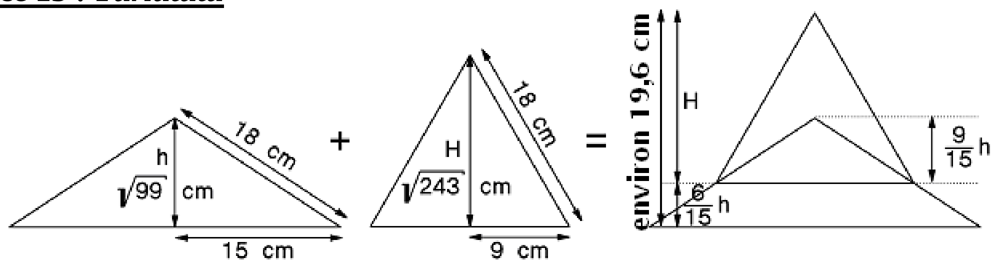
Exercice 12 : *Pour cent âges*



Soit p le pourcentage des jeunes.
On a l'équation : 0,2 p + 0,9 (100 – p) = 34 à résoudre.
La solution est p = 80%.

Il y a donc 4 000 jeunes dans cette population.

Exercice 13 : *Turlututu*



Pour chaque cône, on a les relations :
$\frac{\alpha}{360} = \frac{R}{18}$ où α est l'angle du secteur de disque utilisé pour confectionner le cône et $h^2 = 18^2 - R^2$.
On obtient les dimensions des cônes indiquées ci-dessus. Pour calculer la hauteur de l'empilement des 2 cônes, il faut encore appliquer le théorème de Thalès. (voir fig.3)