Eléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve du 4 mars 2010

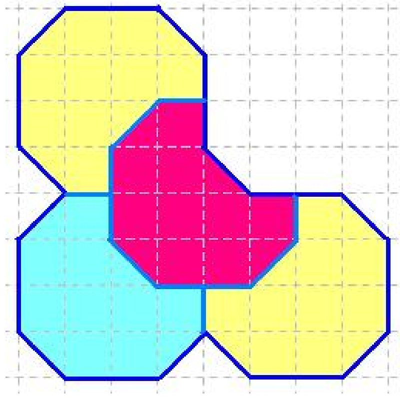
Exercice 1 – Mathémagique

Le magicien va, évidemment, retourner le jeton qu'il a suivi du regard.

- Si ce jeton est de la couleur de celui qui était au milieu, c'est qu'il n'a pas subi l'échange. C'est donc celui-ci qui a été choisi par le spectateur.
- Si ce jeton est d'une autre couleur, c'est qu'il a été échangé avec celui qui était au milieu. Donc le jeton choisi par le spectateur est de la troisième couleur.

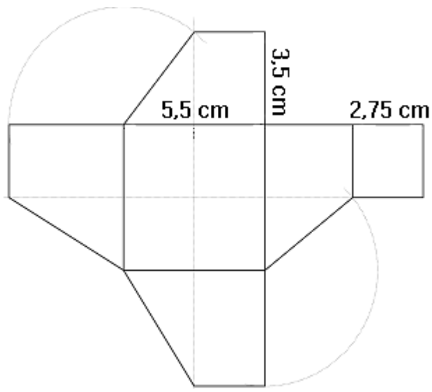
Exercice 2 – Chacun a sa place

Voici la solution de ce partage :



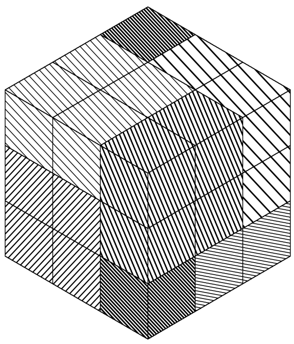
Exercice 3 – La pierre d'angle

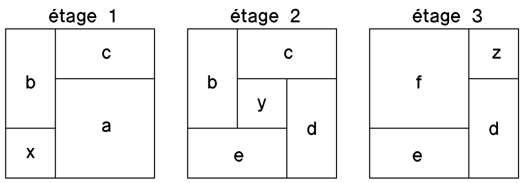
La dernière couche de l'empilement se réduit à une petite pyramide qui est une réduction à l'échelle 1/200 de la grande.
A l'étage précédent, la section de la Pyramide est un carré de côté double, soit 220 cm. L'avant dernière couche est donc constituée de 4 pierres d'angle jointives.
Ainsi, le carré supérieur de chaque pierre d'angle a un côté de 55 cm.
Voici un patron : 3 dimensions sont suffisantes pour le tracer. Les autres peuvent être reportées au compas.



Exercice 4 – 3D :

Voici la solution et des vues en coupe à chaque étage.
Les 6 faces de l'assemblage présentent le même dessin à une rotation ou à une symétrie près.
Les petits cubes x, y, *z* occupent une diagonale.

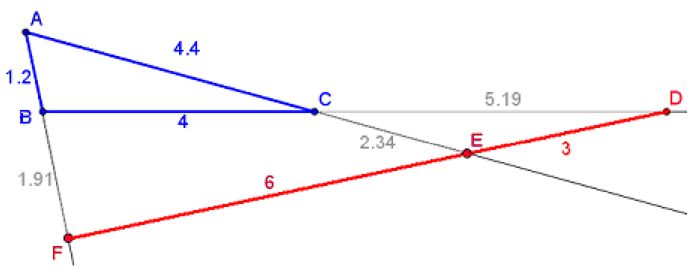




NB : les vues en coupe ne sont pas demandées

Exercice 5 – Gardez le cap !

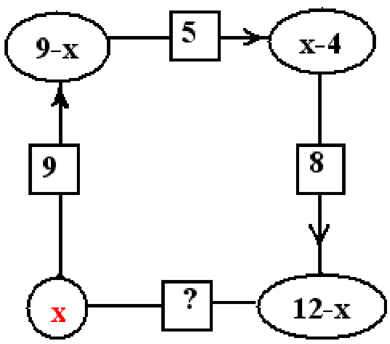
Entre 7h et 7h05, le pétrolier parcourt 3 km, puis 6 km dans les 10 min suivantes.
Il s'agit alors de tracer la carte ci-contre à l'échelle 1/50 000.
On prolonge les côtés du triangle, puis on se débrouille avec une règle graduée pour trouver le mieux possible 3 points D, E, F alignés tels que DE = 6cm et EF = 12 cm.



(Des calculs trigonométriques non demandés ici montrent que la solution est unique et que :
CD ≈ 5,19 ; CE ≈ 2,34 et BF ≈ 1,91 *à* 0,01 *près)*

Exercice 6 – La couleur des nombres

1 < 2, donc 2 est rouge.   2+1 = 3, donc 3 est bleu.
2+1 < 4, la somme de tous les rouges inférieurs à 4 est inférieure à 4 donc 4 est rouge.
4+1 = 5, 5 est bleu.   4+2 = 6, 6 est bleu. 4+2+1 = 7, 7 est bleu.
4+2+1 < 8, la somme de tous les rouges inférieurs à 8 est inférieure à 8 donc 8 est rouge, etc.
Ainsi seront rouges toutes les puissances entières de 2 et bleus les autres entiers.
(On retrouve la numération binaire : par exemple $10 = 8+2 = \overline{1\,010}_2$.)
Les rouges inférieurs à 50 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 et 32.



Exercice 7 – Très impossible

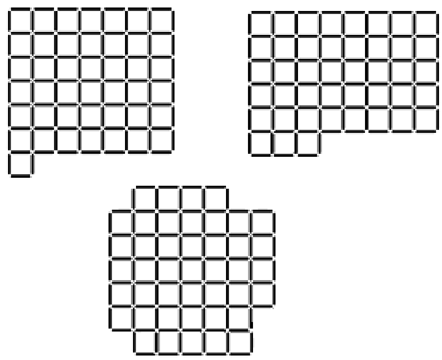
Soit x le nombre placé dans le disque en bas à gauche.
Alors, en suivant les flèches, on obtient la figure ci-contre.
La somme des deux disques de la ligne du bas vaut 12.
Ainsi, le carré situé entre ces disques
contient nécessairement 12.

Les nombres dans les disques étant des entiers naturels, on obtiendra une solution pour toute valeur entière de x comprise entre 4 et 9. **Il y a donc 6 solutions.**

Exercice 8 – Carrés d'allumettes

Intuitivement, on sent que des dispositions compactes proches d'un carré optimisent le nombre de carrés réalisables.
La démonstration, difficile, n'est pas demandée ici.

Avec 100 allumettes, on peut réaliser un assemblage de 43 carrés, au maximum.
Ci-contre, par exemple, trois solutions.



Exercice 9 – Travail au noir

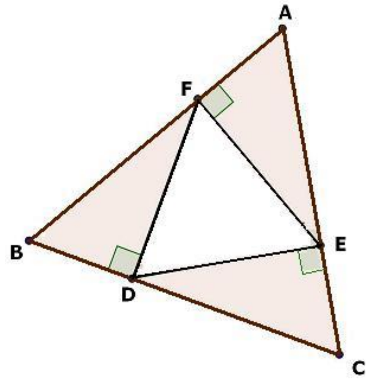
Il faut envisager le pire des cas : **Geoffroy doit prendre 27 objets**.
26 ne suffisent pas : il pourrait avoir les 20 chaussettes et 6 gants gauches.
Avec 27 il a au moins 7 gants donc une paire correcte et il a au moins 15 chaussettes donc plusieurs paires correctes.

Exercice 10 – Retour de la coccinelle

Si on note ***x*** la distance DC, on aura CE = $x.\cos 60° = \frac{x}{2}$, puis AE = $12 - \frac{x}{2}$ et ainsi de suite.

D = G donne alors l'équation: $\dfrac{12-\dfrac{12-\frac{x}{2}}{2}}{2} = 12 - x$

dont la solution est : $x = 8$.
Le point D se trouve alors **au tiers de [BC] à partir de B**.



Autre solution, sans mise en équation :
Les triangles CDE, EAF et FBD sont rectangles et ont des angles de 30° et 60°.
Avec 3 angles de 60°, le triangle DEF est équilatéral.
Les triangles CDE, EAF et FBD sont donc isométriques.
Alors BD = DC/2, autrement dit: BD est le tiers de BC.

Exercices « Spécial Secondes »

Exercice 11 – Salle modulable

Soit a le nombre de sièges dans une rangée.
Soit b le nombre de rangées.
Le problème se ramène au système suivant :

$$\begin{cases} ab = (a+4)(b-1) \\ ab = (a-11)(b+4) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -a+4b = 4 \\ 4a-11b = 44 \end{cases} \quad \text{après réduction.}$$

La résolution donne : $a = 44$ et $b = 12$.
La configuration initiale présente 12 rangées de 44 sièges.
Il y a 528 places dans la salle.

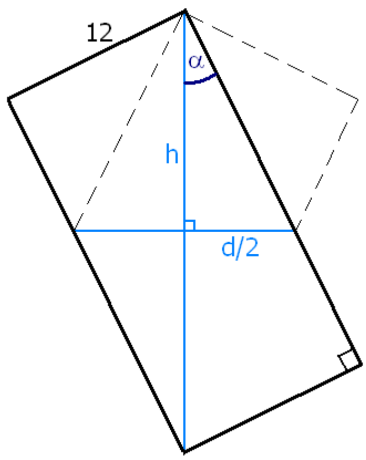
B \ A	2	4	10
3	B	A	A
5	B	B	A
8	B	B	A

Exercice 12 – Défi de dés

Si on fait un inventaire des possibilités, à l'aide d'un tableau 3 × 3, on arrive à la conclusion que **la probabilité qu'Anatole surpasse Barnabé est de 4/9.**
Si l'on se limite à des nombres entiers, les seuls dés répondant au défi de Chloé sont **C_1 : 1, 6 et 9** et **C_2 : 1, 7 et 9**.
Avec C_1 ou C_2, Chloé a 4 chances sur 9 de gagner contre Anatole
et 5 chances sur 9 de gagner contre Barnabé.

D'autres triplets (x, y, z) non entiers peuvent être solution pour peu qu'ils vérifient l'une des trois conditions suivantes : ($x < 2 \quad 5 < y < 8 \quad 8 < z < 10$) ou ($3 < x < y < 4 \quad 8 < z < 10$) ou ($x < 2 \quad 8 < y < z < 10$).

Exercice 13 – Chapeau chinois

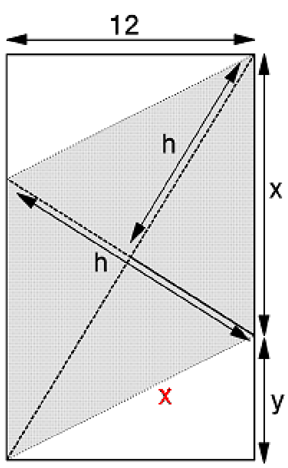


Lauralie a plié sa feuille rectangulaire en faisant coïncider deux sommets opposés.
Si on déplie la feuille, on obtient la figure ci-contre:

h = d, si et seulement si $\boxed{\tan(\alpha) = \frac{1}{2}}$.

On peut en déduire que la longueur de la feuille est 24 cm.

Cette résolution trigonométrique est la plus rapide.



Il y a d'autres traitements possibles. En voici un exemple:

Sur la feuille dépliée, l'aire du losange gris peut s'écrire h^2 *ou bien* $12x$.

Dans le chapeau, on a, par Pythagore : $h^2 + \frac{h^2}{4} = x^2$, *donc* $12x + \frac{12x}{4} = x^2$,

soit $15x = x^2$, *donc* $x = 15$.

Encore par Pythagore dans le triangle rectangle blanc :
$y^2 = 15^2 - 12^2$, *donc* $y = 9$,
et la longueur du rectangle est $15 + 9 = 24$ *cm*.