Eléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve du 22 mars 2011

Exercice 1 – Rendez-vous chez Khan, 7 points

L'un des deux protagonistes, disons Marco, chausse les rollers au départ, parcourt quelques kilomètres et prend de l'avance sur son ami.

Marco ne gagnera pas de temps s'il s'arrête pour attendre son ami ou s'il revient en arrière pour lui passer les rollers. Il les déposera donc et continuera à pied. Polo les chaussera au passage pour rattraper Marco.

Avec cette stratégie, plusieurs solutions sont théoriquement équivalentes, mais si l'on veut minimiser le temps perdu à déchausser ou à chausser, Marco déposera les rollers à mi-parcours. Ainsi, chacun fera 10 km à pied et 10 km en rollers.

Marco et Polo arriveront en même temps chez Kahn au bout de 2h30 min (et quelques secondes !)**.**

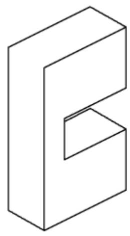
Exercice 2 – Qui peut le plus peut le moins, 5 points

Le minimum est : 1×2+1×4+5+7= **18**, le maximum est : (1+1)×2×4×5×7= **560**.

Chacun de ces scores peut être obtenu autrement.

Exercice 3 – Casse-tête, 7 points

Plusieurs stratégies sont possibles.



On pourra, par exemple prendre d'abord le pavé « horizontal », calculer son volume ($2 \times 8 \times 10 = 180$ cm^3), puis ajouter les deux parties du pavé vertical de 10 cm de haut qui dépassent (à savoir 2 fois $2 \times 4 \times 8$ soit 2 fois 64 c.à.d. 128 cm^3).

On ajoute finalement les deux morceaux du pavé vertical de 8 cm de haut, un peu plus compliqués comme le montre le dessin ci-contre.

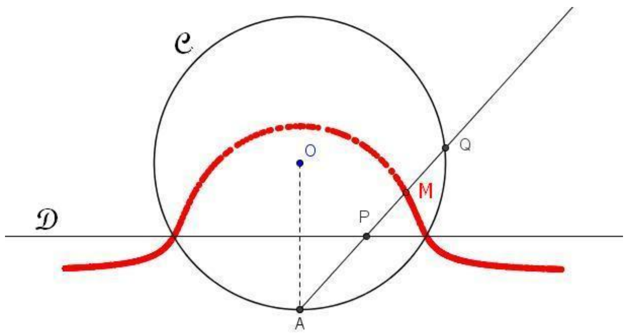
(2 morceaux de $2 \times 4 \times 8$ auxquels il manque un morceau de $2 \times 3 \times 2$,
soit 2 fois (64 – 12) soit 2 fois 52 c.à.d. 104 cm^3).

On arrive ainsi à un volume total de 160 + 128 + 104 = **392 cm^3**.

Exercice 4 – Heureux événement, 5 points

Voici la courbe médiane du cercle et de la droite :

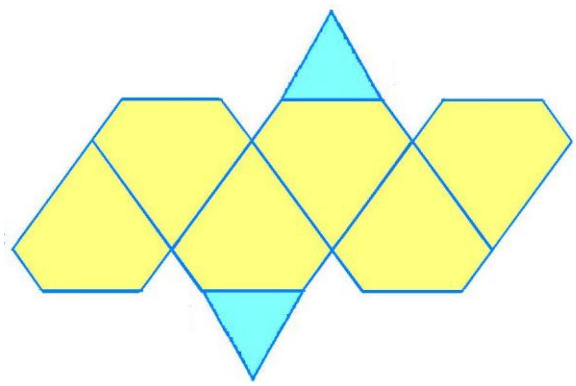
On voudra voir le comportement asymptotique des deux côtés.



Exercice 5 – Polyèdre de Dürer, 7 points

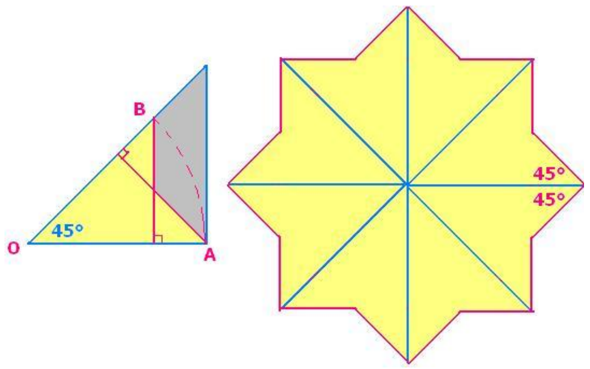
Il y a plusieurs patrons possibles.
Voici une disposition compacte :

On sera attentif au caractère équilatéral des faces triangulaires.



Mathématiques SANS Frontières

Exercice 6 – Zelliges, 5 pts



La figure de gauche montre la feuille de papier pliée ; en gris, le trapèze à couper.

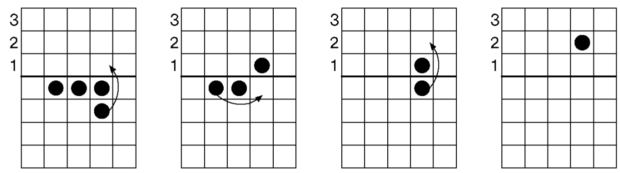
Après 3 pliages, l'angle O mesure $\frac{360°}{8}$ soit 45°.

Les triangles rectangles d'hypoténuses OA et OB ont un angle de 45 ° donc leurs autres angles A et B mesurent aussi 45°.

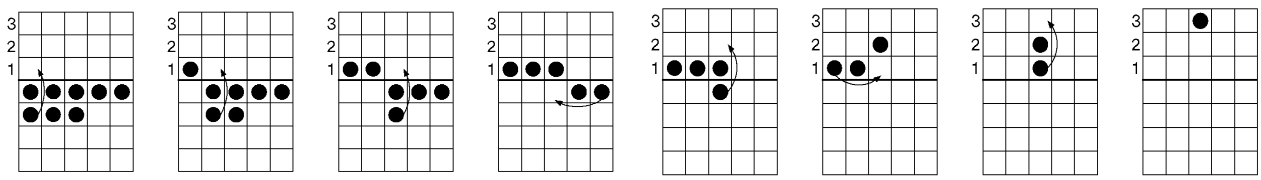
Lorsqu'on déplie, chaque angle est dupliqué par symétrie donc le polygone aura huit angles de 90°.

Exercice 7 – Essai de 3ème ligne, 7 points

Voici une suite de déplacements qui permet d'atteindre la 2ème ligne.

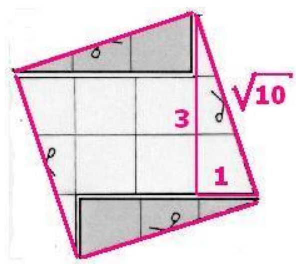


Pour atteindre la 3ème ligne, il faut au moins 8 pions. Voici une solution parmi d'autres:

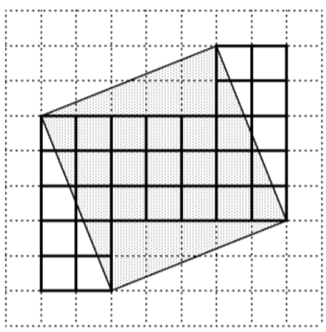


Exercice 8 – Coupes au carré, 5 points

Formé de 10 carreaux unitaires, le carré a évidemment une aire de 10 cm^2. Alors son côté mesure $\sqrt{10}$ cm.



Ceci explique la coupe en biais de 3 carreaux : d'après le théorème de Pythagore, $3^2 + 1^2 = 10$.



On pourra alors imaginer le partage d'un assemblage de 29 carreaux présenté ci-contre après que l'on aura remarqué que $29 = 5^2 + 2^2$.

Ainsi, la coupe en biais donne des segments de longueur $\sqrt{29}$ cm.

Exercice 9 – Après 2010 ?, 7 points

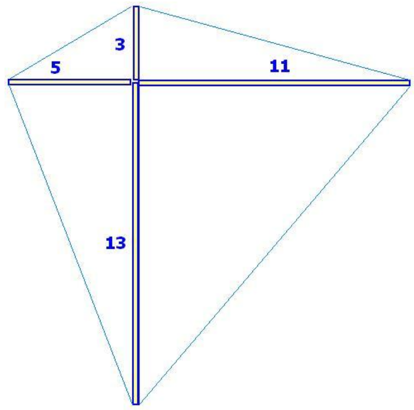
Il faut commencer à calculer les premiers termes et observer :

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)	11)	12)	13)	14)	15)
2010	5	$5^2 = 25$	$2^2+5^2 = 29$	$2^2+9^2 = 85$	$8^2+5^2 = 89$	$8^2+9^2 = 145$	$1^2+4^2+5^2 = 42$	$4^2+2^2 = 20$	$2^2+0^2 = 4$	$4^2 = 16$	$1^2+6^2 = 37$	$3^2+7^2 = 58$	$5^2+8^2 = 89$	…

On constate que le 14e nombre est le même que le 6e. Comme la règle reste la même, on sait que les 22e, 30e et 38e nombres sont aussi 89. A partir du rang 6, la suite est de période 8, donc les 8e, 2000e et 2008e nombres sont 42 puisque leurs rangs sont des multiples de 8.

Et **le 2011e nombre est 16** puisque 2011 = 2008 + 3.

Exercice 10 – A quatre pâtes, 10 points



Dans tout triangle, la hauteur issue d'un sommet est inférieure ou égale à chacun des côtés adjacents de ce sommet (distance d'un point à une droite).
Ainsi, avec deux spaghetti ayant un sommet en commun, **l'aire maximale est obtenue en les positionnant à angle droit**.
Comme on a 4 pâtes, on peut s'arranger pour que les 4 triangles soient rectangles. Les quatre spaghetti formeront alors, deux par deux, les diagonales d'un quadrilatère dont l'aire sera égale à la moitié du produit des diagonales.
Reste à voir pour quelle disposition ce produit est maximal.
On observe que (5+11)×(3+13) donne le plus grand produit, d'où la disposition ci-dessus.

Exercices « Spécial Secondes »

Exercice 11 – Bien ficelé, 5 points

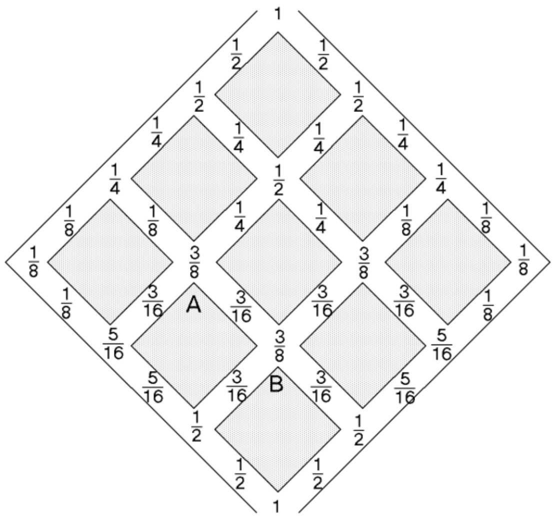
Soit x le coté de la base carrée du paquet. Soit y sa hauteur. Ces deux dimensions étant exprimées en centimètres.

Le problème se ramène au système d'équations suivant : $\begin{cases} 4x + 4y - 10 = 150 \\ 6x + 2y + 30 = 150 \end{cases}$

La résolution donne : $x = 10$ et $y = 30$.

Le volume du paquet est $V = 10 \times 10 \times 30 = 3\,000$ cm^3.

Exercice 12 – Roule ta bille, 7 points



Voici le réseau des différents chemins que peuvent emprunter les billes avec la probabilité de passage sur chaque tronçon et à chaque carrefour.
On remarquera que **la probabilité que la bille passe en A est égale à $\frac{3}{8}$.**

Et **la probabilité que la bille passe en B est aussi égale à $\frac{3}{8}$.**

Exercice 13 – TGV d'Albert, 10 points

5 min = $\frac{1}{12}$ h et 6 min = $\frac{1}{10}$ h

Quand les trains roulent à 300 km/h dans les deux sens, les trains qui se suivent sont distants de $(300 + 300)\times\frac{1}{12} = 50$ km les uns des autres.

Cette distance ne change pas, après le ralentissement, pour ceux qui croisent le train d'Albert, donc $(300 + \boldsymbol{v_2}) \times \frac{1}{10} = 50$. Alors $\boldsymbol{v_2} = \mathbf{200}$ **km/h**.