Éléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve définitive du 5 février 2021

Exercice 1 – *En entrée…* – 7 points –

Le dernier paragraphe nous donne de suite deux indications :
Le Brésilien a pris une salade alsacienne, et l'épouse de l'Allemand a pris une tarte flambée.
La remarque du Brésilien impose les escargots à l'Allemand et donc la tarte flambée au Suisse.
On en déduit que les escargots seront pour la Brésilienne et la salade alsacienne pour la Suissesse.
Un tableau peut aider pour la résolution du problème :

	Monsieur	Madame
Brésil	Salade alsacienne	Escargots
Suisse	Tarte flambée	Salade alsacienne
Allemagne	Escargots	Tarte flambée

Exercice 2 – *Revoilà les Dalton* – 5 points –

Soient a, b et c les trois chiffres distincts rangés dans l'ordre ordre croissant.
Un tableau donne aisément les deux solutions possibles :

- **a = 2 ; b = 7 et c = 9**
- **a = 4 ; b = 5 et c = 9**

Les trois chiffres			Les résultats des trois calculs		
a	b	c	ab+c	ac+b	bc+a
1	8	9	8 + 9 = 17	9 + 8 = 17	72 + 1 = 73
2	7	9	14 + 9 = 23	18 + 7 = 25 = 5^2	63 + 2 = 65
3	6	9	18 + 9 = 27	27 + 6 = 33	54 + 3 = 57
3	7	8	21 + 9 = 29	24 + 7 = 31	56 + 3 = 59
4	5	9	20 + 9 = 29	36 + 5 = 41	45 + 4 = 49 = 7^2
4	6	8	24 + 8 = 32	32 + 6 = 38	48 + 4 = 52
5	6	7	30 + 7 = 37	35 + 6 = 41	42 + 5 = 47

Exercice 3 – *Que du bonheur !* – 7 points –

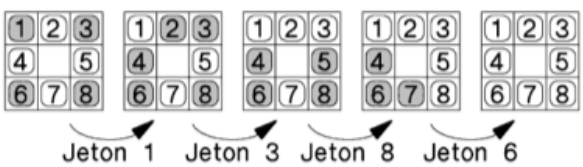
Pour le début de l'exercice, il s'agit de faire systématiquement tous les calculs.
Remarque : *On peut repérer les sommes intermédiaires (par exemple 29 et 89) qui ne conduiront pas à 1 et s'arrêter dès qu'on les obtient, ce qui limite un peu le nombre de calculs.*
Les cinq « nombres heureux » inférieurs à 20 sont : 1 ; 7 ; 10 ; 13 et 19.

Pour 2021: $2^2 + 0^2 + 2^2 + 1^2 = 9$. Or 9 n'est pas dans la liste des nombres heureux inférieurs à 20.
Thomas n'a pas raison, 2021 n'est pas une année heureuse.

On poursuit les calculs pour les années suivantes :
2022 : $2^2+ 0^2+ 2^2+ 2^2= 12$, n'est pas dans la liste des nombres heureux inférieurs à 20
2023 : $2^2+ 0^2+ 2^2+3^2= 17$, n'est pas dans la liste des nombres heureux inférieurs à 20
2024 : $2^2+ 0^2+ 2^2+ 4^2= 24$; $2^2+ 4^2= 20$; $2^2+ 0^2= 4$, n'est pas dans la liste des nombres heureux inférieurs à 20
2025 : $2^2+ 0^2+ 2^2+ 5^2= 33$; $3^2+ 3^2= 18$, n'est pas dans la liste des nombres heureux inférieurs à 20
2026 : $2^2+ 0^2+ 2^2+ 6^2= 44$; $4^2 + 4^2 = 32$; $3^2+ 2^2=13$ qui est dans la liste des nombres heureux inférieurs à 20

2026 sera la prochaine « année heureuse ».

Exercice 4 – *Tout blanc* – 5 points –



En retournant une fois chacun des jetons situés dans les angles, ils seront blancs.
Et les jetons des milieux des côtés seront chacun retournés deux fois et seront aussi blancs :
le 2 par les 1 et 3 ; le 5 par les 3 et 8 ;
le 7 par les 8 et 6 ; et le 4 par les 6 et 1.

Exercice 5 – *Plismes* – 7 points –

L'aire d'un triangle équilatéral de côté a vaut $\dfrac{a^2 \times \sqrt{3}}{4}$

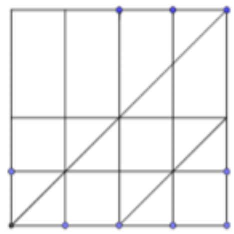
En pliant parallèlement à la longueur, le volume du prisme sera $V_1 = \dfrac{7^2 \times \sqrt{3} \times 30}{4} = \dfrac{735\sqrt{3}}{2}$

En pliant parallèlement à la largeur, le volume du prisme sera $V_2 = \dfrac{10^2 \times \sqrt{3} \times 21}{4} = 525\sqrt{3}$

Le volume du prisme est le plus grand quand on plie parallèlement à la largeur.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{735}{1\,050} = \frac{7}{10}$$

Exercice 6 – *Avis de recouvrement* – 5 points –



On peut réaliser la manipulation en découpant des carrés.
La superposition des neuf carrés donne, si on n'a pas fait tourner le carré central, le dessin ci-contre, séparé en **18 régions.**

Exercice 7 – *Pieds de bûches* – 7 points –

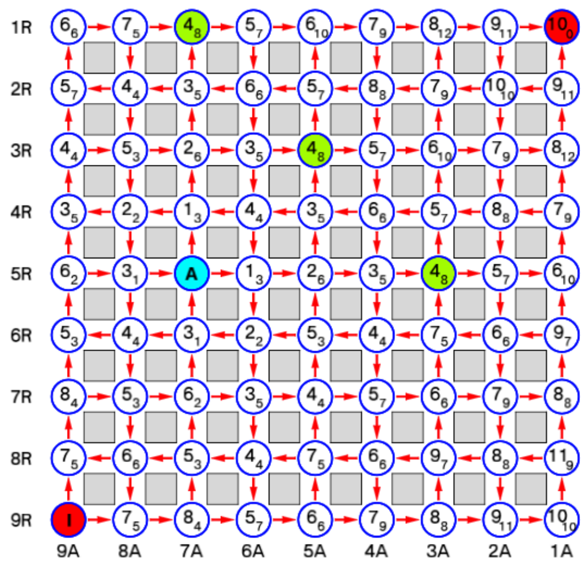
La stratégie de résolution consiste à chercher la hauteur totale de toutes les bûches soit 350 cm, puis à déterminer le nombre de pieds en cherchant un diviseur de 350 :

- 350 se divise par 2, mais deux pieds de 175 cm sont trop hauts pour une étagère facile à utiliser.
- 350 ne se divise pas par 3, 4 ou 6.
- 350 se divise par 5, et 5 pieds de 70 cm pourraient constituer une solution.
- 350 se divise par 7, mais avec des pieds de 50 cm, la bûche de 60 cm ne pourrait pas être utilisée. On arrivera à la même conclusion avec des diviseurs plus grands.

La seule solution est bien **cinq pieds de 70 cm chacun :**

- **le 1er avec une bûche de 60 cm et une de 10 cm,**
- **le 2e avec une bûche de 50 cm et une de 20 cm,**
- **le 3e avec une buche de 40 cm et une de 30 cm,**
- **le 4e avec deux bûches de 30 cm et une de 10 cm,**
- **le 5e avec une bûche de 30 cm et deux de 20 cm.**

Exercice 8 – *Mickey moves* – 5 points –

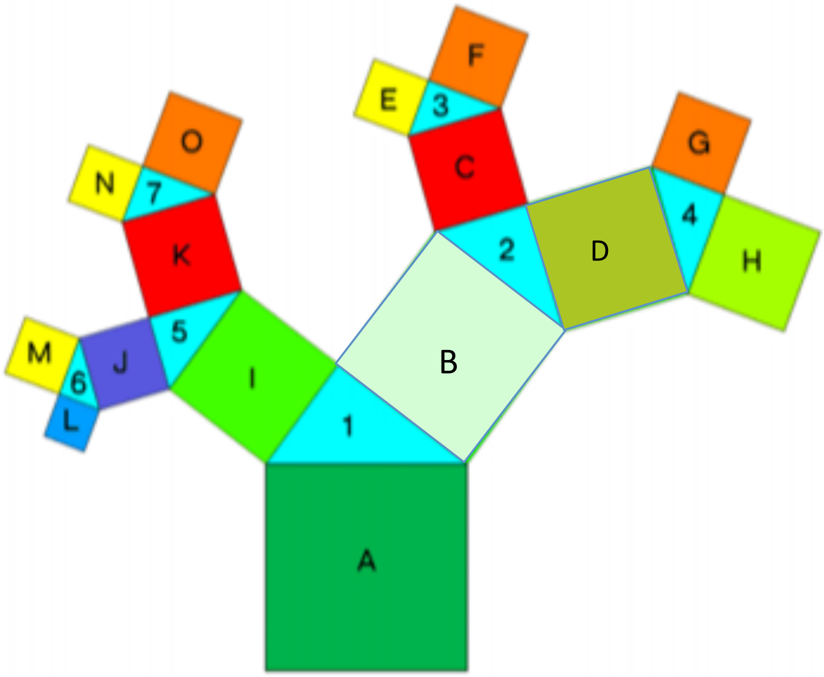


Une des stratégies pour cet exercice est de noter à chaque carrefour à partir du point A la distance « aller » et la distance « retour ».
Dans chaque cercle du dessin ci-contre sont notées « la distance aller » et la « distance retour » en indice.
Les trois carrefours possibles pour localiser le nouveau domicile sont indiqués en vert sur le dessin ci-contre.
Les coordonnées en sont :
(7A ; 1R) ; (5A ; 3R) et (3A ; 5R)

Exercice 9 – *Malo trie* – 7 points –

La seule manière de lire un autre numéro sur un billet est de le tourner par une symétrie centrale.
On remarque alors que le 908 se transforme en 806.
Avec une symétrie centrale, les deux chiffres 0 et 8 ne changent pas et les deux chiffres 6 et 9 échangent leur valeur alors que tous les autres chiffres perdent leur signification. Il faut trouver tous les nombres écrits avec ces quatre chiffres, en admettant qu'aucun nombre ne commence par zéro, comme le laisse supposer le 96.
On trouve 1 paire de nombres à un chiffre, 3 paires de nombres à deux chiffres et 15 paires de nombres à trois chiffres.
Les paires qui posent problème sont :
6 et 9
66 et 99 ; 68 et 89 ; 86 et 98
606 et 909 ; 608 et 809 ; 666 et 999 ; 668 et 899 ; 669 et 699 ; 686 et 989 ; 688 et 889 ; 696 et 969 ; 698 et 869 ; 806 et 908 ; 866 et 998 ; 868 et 898 ; 886 et 988 ; 896 et 968 ; 966 et 996.

Exercice 10 – *Cactus fractalus* – 10 points –



Le premier carré a 5 cm pour côté et les côtés du triangle construit sur l'un de ses côtés mesurent 3, 4 et 5 cm.

Au départ on a donc un carré de côté 5 dont l'aire est 25 cm^2.
À la fin de la première semaine on a donc en plus deux carrés de côté 3 et 4 et d'aires respectivement 9 cm^2 et 16 cm^2.

Les triangles sont semblables.
Les rapports de longueurs sont de 3/5 pour les triangles rectangles qui sont à «gauche» et de 4/5 pour les triangles rectangles qui sont à «droite».
Pour leurs aires les rapports sont respectivement de 9/25 et 16/25.

Voir dessin en réelle grandeur sur fiche annexe.

Ci-dessous, les dimensions des différents triangles :

Triangle	1	2	3	4	5	6	7
Hypoténuse	5 cm	4 cm	2,4 cm	3,2 cm	3 cm	1,8 cm	2,4 cm
Grand côté	4 cm	3,2 cm	1,92 cm	2,56 cm	2,4 cm	1,44 cm	1,92 cm
Petit côté	3 cm	2,4 cm	1,44 cm	1,92 cm	1,8 cm	1,08 cm	1,44 cm

On obtient les aires des différents carrés :
Carré A : 25 cm^2 Carré B : 16 cm^2 Carré I : 9 cm^2 Carré D : 10,24 cm^2
Carré H : 6,5536 cm^2 Carré J : 3,24 cm^2 Carré L : 1,1664 cm^2
Les carrés K et C ont même aire 5,76 cm^2
Les carrés O, F et G ont même aire : 3,6864 cm^2
Les carrés M, N et E ont même aire : 2,0736 cm^2

Exercice 11 – *Ça colle !* – 5 points –

Soit x le nombre de timbres à 20 cents.
Le nombre de timbres à 10 cents est alors 10 x.
Soit y le nombre de timbres à 50 cents.
On obtient l'équation : 20 x + 10 x 10 x + 50 y = 1 000 soit 120 x + 50 y = 1 000 ou encore 12 x + 5 y = 100
C'est une équation dont les solutions sont entières.
On essaie et on trouve x = 5 et y = 8

L'employé va donner à Charlotte :
5 timbres à 20 cents ; 50 timbres à 10 cents et 8 timbres à 50 cents.

Exercice 12 – *En bateaux* – 7 points –

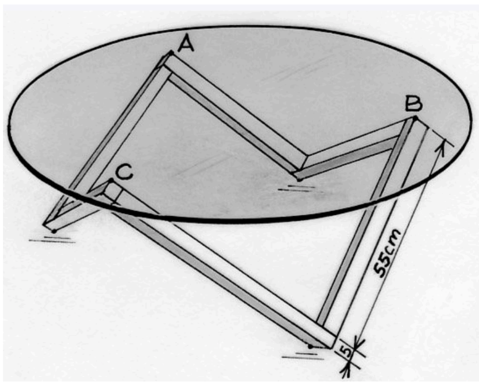
Tissia prend 10 min pour faire le tour de l'île.
Amalio fait un tour complet en 60 min et donc Tissia fait 6 tours pendant ce temps.

Lorsque Amalio aura fait un tour complet, Tissia aura fait 6 tours.

Tissia aura dépassé Amalio 5 fois.
La première fois que Tissia va dépasser Amalio aura lieu au bout de 10 + 10/5 min soit 12 min.

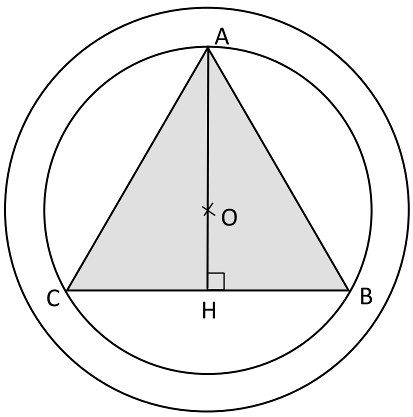
Après le départ, Tissia redépassera à nouveau Amalio dans 12 min.

Exercice 13 (secondes GT) – *Les pieds sous la table* – 10 points –



Les tasseaux consécutifs sont perpendiculaires.
On en déduit AB = BC = CA (hypoténuse de triangles rectangles ayant des côtés égaux) et le triangle ABC est équilatéral.
AB = BC = CA = $55\sqrt{2}$

Vue du plateau du dessus :



OA est le rayon du cercle sur lequel sont situés les 3 points A, B et C.
OA = $\frac{2}{3}$ AH

AH est une hauteur dans le triangle équilatéral ABC, d'où AH = $\frac{55\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

On en déduit OA = $\frac{55\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{3}$ et finalement OA = $\frac{55\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$CS

Le rayon du plateau est égal à :
$\frac{55\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 10 \approx 54{,}9$ cm

Le rayon de la table est $\boldsymbol{\frac{55\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 10 \approx 54{,}9}$ **cm**

<u>**Remarque :**</u> *Si on ne connaît pas la propriété des hauteurs et médianes d'un triangle équilatéral on peut utiliser la trigonométrie dans le triangle rectangle.*

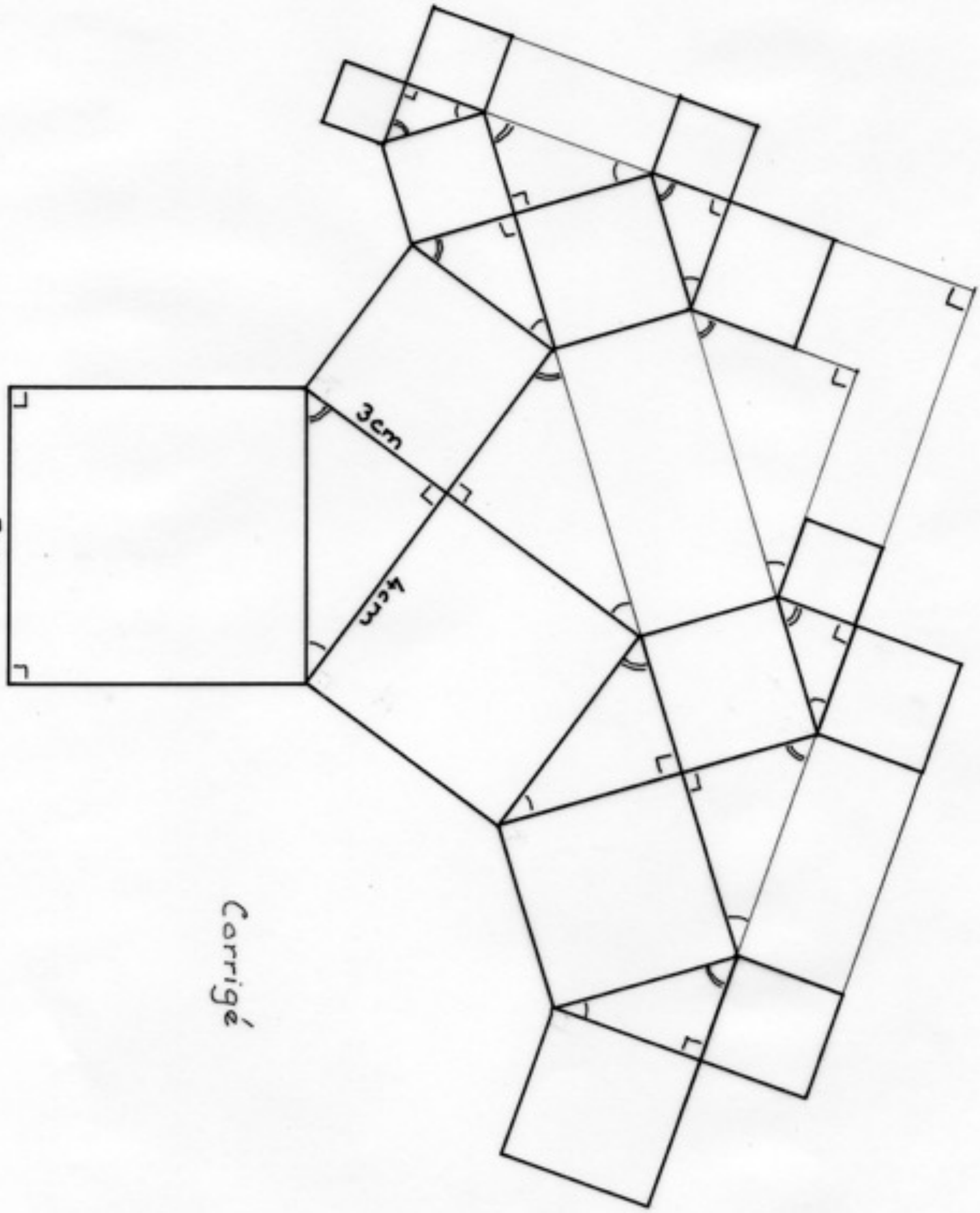
Exercice 13 (secondes Pro) – *Et trois de plus !* – 10 points –

Avec Excel :
Cellule A2 « = 0 » ; cellule A3 « = A2 + 1 »,
et on tire vers le bas.
Cellule B2 « = 25 – A2 » puis on tire vers le bas.
Cellule C2 « = 6 * A1 + 9 * A2 » et on tire vers le bas.

Si on transforme encore un « 6 » on obtient bien 207
On a donc dix huit « 9 » et sept « 6 » au départ.

	A	B	C
1	Nombre de "6"	Nombre de "9"	Somme des chiffres
2	0	25	225
3	1	24	222
4	2	23	219
5	3	22	216
6	4	21	213
7	5	20	210
8	6	19	**207**
9	7	18	**204**
10	8	17	201
11	9	16	198
12	10	15	195
13	11	14	192
14	12	13	189
15	13	12	186
16	14	11	183
17	15	10	180
18	16	9	177
19	17	8	174
20	18	7	171
21	19	6	168
22	20	5	165
23	21	4	162
24	22	3	159
25	23	2	156
26	24	1	153
27	25	0	150

Si Excel n'est pas utilisé, et à l'aide de calculs :
On note a le nombre cherché de « jetons 9 » au départ.
Le nombre de « jetons 6 » est $25 - a$.
La somme des chiffres est :
$6(25 - a) + 9a = 204$ et en résolvant l'équation :
$3a + 150 = 204$
$3a = 54$ d'où $a = 18$.
On a donc dix huit « 9 » et sept « 6 » au départ.



Corrigé