Éléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve définitive du 10 mars 2022

Exercice 1 – *À deux mains* – 7 points –

Soient G le nombre de pièces de la main gauche et D celui de la main droite.

- si G est impair et D pair, alors 3G est impair et 2D pair donc 3G + 2D est impair.
- Si G est pair et D impair, alors 3G est pair et 2D aussi donc 3G + 2D est pair.

D'où la conclusion :

Si le résultat annoncé par Pablo est impair, la main droite contient un nombre pair de pièces et si le résultat annoncé est pair c'est la main gauche qui contient un nombre pair de pièces.

Exercice 2 – *Carrément carré* – 5 points –

Les deux premiers chiffres du nombre à quatre chiffres peuvent être : 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ou 81.
Les deux derniers chiffres du nombre à quatre chiffres peuvent être : 01 ; 04 ; 09 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ou 81.
Il y a 54 nombres à tester, la solution est unique et 1681 = 41^2.
1681 est le nombre qui convient.

Exercice 3 – *Dés triangles* – 7 points –

Les trois nombres positifs a, b, c permettent de construire un triangle de côtés a, b et c si et seulement si le plus grand des trois nombres est inférieur strictement à la somme des deux autres.

- Avec la valeur du premier dé « 1 », il y a 6 lancers gagnants :
  (1 ; 1 ; 1) ; (1 ; 2 ; 2) ; (1 ; 3 ; 3) ; (1 ; 4 ; 4) ; (1 ; 5 ; 5) et (1 ; 6 ; 6).
  Le plus petit côté mesurant 1, avec l'inégalité triangulaire, la seule possibilité pour ne pas avoir un triangle aplati ou une construction impossible est d'avoir un triangle isocèle de base 1.
  La probabilité de gagner, sachant que le premier dé est « 1 », est de :
  $$\boldsymbol{\frac{6}{36} = \frac{1}{6}}$$
- Avec la valeur du premier dé « 4 », 24 lancers sur 36 sont gagnants :
  (4 ; 1 ; 4) ; (4 ; 2 ; 3) ; (4 ; 2 ; 4) ; (4 ; 2 ; 5)
  (4 ; 3 ; 2) ; (4 ; 3 ; 3) ; (4 ; 3 ; 4) ; (4 ; 3 ; 5) ; (4 ; 3 ; 6) ;
  (4 ; 4 ; 1) ; (4 ; 4 ; 2) ; (4 ; 4 ; 3) ; (4 ; 4 ; 4) ; (4 ; 4 ; 5) ; (4 ; 4 ; 6)
  (4 ; 5 ; 2) ; (4 ; 5 ; 3) ; (4 ; 5 ; 4) ; (4 ; 5 ; 5) ; (4 ; 5 ; 6)
  (4 ; 6 ; 3) ; (4 ; 6 ; 4) ; (4 ; 6 ; 5) ; (4 ; 6 ; 6)
  La probabilité de gagner, sachant que le premier dé est « 4 », est de :
  $$\boldsymbol{\frac{24}{36} = \frac{2}{3}}$$

Exercice 4 – *À deux vitesses* – 5 points –

Soient d la longueur en km d'un trajet, t la durée de l'aller et t' celle du retour exprimées en heures.
On a d = 6t = 14t'
Pour l'aller-retour, la distance totale parcourue est 2d et la durée totale est t + t'.
On peut alors calculer la vitesse :

$$V = \frac{2d}{t + t'} = \frac{2d}{\frac{d}{6} + \frac{d}{14}} = \frac{2d}{\frac{7d + 3d}{42}} = \frac{84d}{10d} = 8{,}4$$

La vitesse moyenne de Théo sur l'ensemble du trajet est de 8,4 km/h.

Mathématiques SANS Frontières

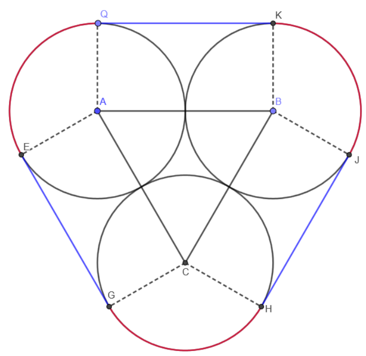
Exercice 5 – *La montée des marches* – 7 points –

Soit x le nombre de pas de Mickaël. Laure en a fait x + 250 pour rejoindre Mickaël sur la même marche.
Le nombre de marches gravies peut s'écrire $3x$ ou $2(x + 250)$.
On a l'équation : $3x = 2(x + 250)$. La solution de cette équation est : $x = 500$.
Comme Mickaël monte les marches trois par trois, le nombre de marches gravies sera $3x$ = 1 500.
De même pour Laure : $2(x + 250)$ = 1 500.
Laure et Mickaël ont déjà gravi 1 500 marches.

Exercice 6 – *Le plein d'erreur* – 5 points –

Si la virgule a été oubliée, et comme les montants affichés le sont au centime près, la somme tapée par la caissière est donc le centuple de la somme due. La caissière lui a donc demandé 99 fois le prix de son carburant. François aurait dû payer : 1 826,45 : 99 = 18,45 €.
18,45 € est le montant qu'aurait dû indiquer la caissière sur le terminal de paiement.

Exercice 7 – *Au piquet* – 7 points –



Considérons une section transversale de l'assemblage des trois piquets. Un brin de ficelle doit permettre d'en faire le tour. La longueur de la ficelle pour attacher les piquets est représentée en rouge. Il faut y ajouter 20 cm pour le nœud.
Chaque arc de cercle dessiné en rouge est égal à 1/3 de la circonférence d'un piquet, soit

$$\frac{2\pi \times 3}{3} = 2\pi$$

La longueur de cet arc est 2 π.
Chaque segment dessiné en bleu est égal à 6 cm.
La longueur totale d'une ficelle est donc : 18 + 6 π + 20 = 38 + 6 π
Comme il y a deux ficelles, on aura : 2(38 + 6 π) = 76 + 12 π ≈ 114 cm
La longueur minimale de ficelle par lot, au cm près, que doit prévoir la jardinerie est de 114 cm.

Exercice 8 – *À vos marques* – 5 points –

Les coureurs ont leurs lignes de départ décalées car leurs courses dans les parties en demi-cercles n'ont pas la même longueur, ces demi-cercles ayant tous des rayons différents.

$$a = \pi \times r_B - \pi \times r_A = \pi \times (r_B - r_A) = \pi \times 1{,}2\ m \approx 3{,}77\ m$$
$$b = \pi \times (r_c - r_B) = \pi \times 1{,}2\ m \approx 3{,}77\ m$$

Les lignes de départ sont espacées successivement les unes des autres d'environ 3,77 m.

Exercice 9 – *À double sens* – 7 points –

On peut mettre la situation en équation :
$4(1000a + 100b + 10c + d) = 1000d + 100c + 10b + a \quad (1)$
On s'aperçoit que a ne peut prendre que les valeurs 1 ou 2 (sinon $4abcd$ dépasserait les 10 000)
Or a est pair, car c'est le chiffre des unités d'un nombre multiplié par 4. Donc $\boldsymbol{a}$ **= 2**.
Les multiples de 4 se terminant par 2 sont : 4 x 3 = 12 ou 4 x 8 = 32, d'où d = 3 ou d = 8.
a = 2 et d = 3 est impossible, car le produit par 4 d'un nombre supérieur à 2 000 ne peut être compris entre 3 000 et 4 000. Donc $\boldsymbol{a}$ **= 2** et $\boldsymbol{d}$ **= 8**.

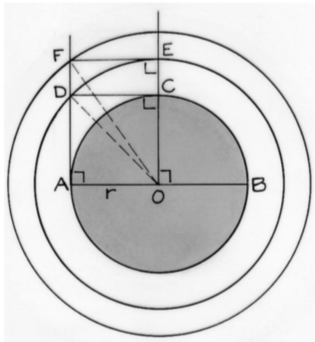
On remplace dans l'équation (1) : $4(2\,000 + 100b + 10c + 8) = 8\,000 + 100c + 10b + 2$

$$400b + 40c + 32 = 100c + 10b + 2$$
$$390b + 30 = 60c$$
$$13b + 1 = 2c$$

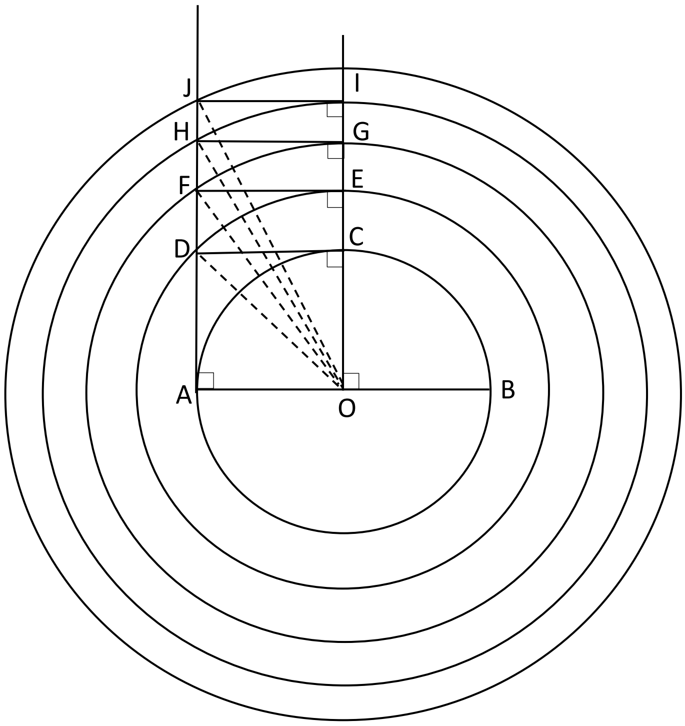
Or b et c sont des nombres inférieurs à 9, la seule solution de cette équation est $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$ **et** $\boldsymbol{c} = \mathbf{7}$.

Le nombre $\boldsymbol{abcd}$ **de quatre chiffres tel que multiplié par 4 on obtient** $\boldsymbol{dcba}$ **est 2178.**

Exercice 10 – *Disqu'aire* – 10 points –



Le rayon OD peut se calculer par Pythagore :
$OD^2 = OA^2 + OC^2 = r^2 + r^2 = 2\,r^2$ d'où $OD = \sqrt{2}\,r$
Le disque de rayon OD a une aire de $\pi(\sqrt{2}r)^2 = 2\pi r^2$,
soit double du disque de rayon OA qui vaut πr^2.
L'aire du disque de centre O passant par D est le double de celle du disque de départ.
De même $OF^2 = OA^2 + OE^2 = r^2 + 2r^2 = 3r^2$ d'où $OF = \sqrt{3}\,r$,
et le disque de rayon OE a une aire de $\pi(\sqrt{3}r)^2 = 3\pi r^2$,
soit triple du disque de rayon OA.
L'aire du disque de centre O passant par F est le triple de celle du disque de départ.



En traçant le cercle de rayon OF, on place le point G intersection de ce cercle avec la perpendiculaire à [AB] passant par O. On trace la perpendiculaire en G à (OE), son point d'intersection avec la perpendiculaire en A à [AB] est H.
L'aire du disque de centre O passant par H est le quadruple de celle du disque de départ.

En traçant le cercle de rayon OH, on place le point I intersection de ce cercle avec la perpendiculaire à [AB] passant par O. On trace la perpendiculaire en I à (OE), son point d'intersection avec la perpendiculaire en A à [AB] est J.
L'aire du disque de centre O passant par J est le quadruple de celle du disque de départ.

Exercice 11 – *La pause s'impose* – 5 points

On remarque qu'avec quatre chiffres consécutifs pour l'affichage d'une heure, les seules possibilités sont (0 ; 1 ; 2 ; 3), (1 ; 2 ; 3 ; 4) et (2 ; 3 ; 4 ; 5), puisque le premier chiffre de l'affichage digital doit être 0 ; 1 ou 2.

On peut alors dresser la liste des 30 heures possibles avec ces trois quadruplets :

(0 ; 1 ; 2 ; 3)

01.23	02.13	03.12
01.32	02.31	03.21
10.23	12.03	13.02
10.32	12.30	13.20
20.13	21.03	23.01
20.31	21.30	23.10

(1 ; 2 ; 3 ; 4)

12.34	13.24	14.23
12.43	13.42	14.32
21.34	23.14	
21.43	23.41	

(2 ; 3 ; 4 ; 5)

23.45
23.54

Dans 35 minutes, les heures se terminant par 1 dans ce tableau auraient un 6 en dernière position.
De même, celles se terminant par 2 auraient un 7 en dernière position, celles par 3 un 8, et celles par 4 un 9, et aucun affichage comportant 6 ; 7 ; 8 ou 9 ne peut avoir quatre chiffres consécutifs.
Il ne reste donc qu'à examiner les heures du tableau se terminant par 0 ou 5, ce sont celles notées en rouge et elles ne sont que 5.

35 minutes avant	11.55	12.45	20.55	22.35	23.10
Heures rouges du tableau :	12.30	13.20	21.30	23.10	23.45
35 minutes après	13.05	13.55	22.05	23.45	00.10

On constate que deux nouveaux affichages ont bien quatre chiffres consécutifs, pas forcément dans l'ordre.
Il n'y a qu'une solution : 23h10, à qui, lorsqu'on ajoute 35 min donne 23h45 (on a bien 4 chiffres consécutifs)
Élio s'est accordé une pause de 23h10 à 23h45.

Exercice 12 – *C'est ballot* – 7 points –

Il faut une bonne vision dans l'espace.
Le volume de ce solide se décompose comme suit :

- Sept cubes de 1 m^3 soit 7 m^3
- Douze quarts de cylindres de rayon 1 m et de hauteur 1 m ; soit trois cylindres de rayon 1 m et de hauteur 1 m soit $3\,\pi$
- Huit huitièmes de boule de rayon 1 m soit une boule entière de rayon 1 m dont le volume est $\frac{4}{3}\,\pi$

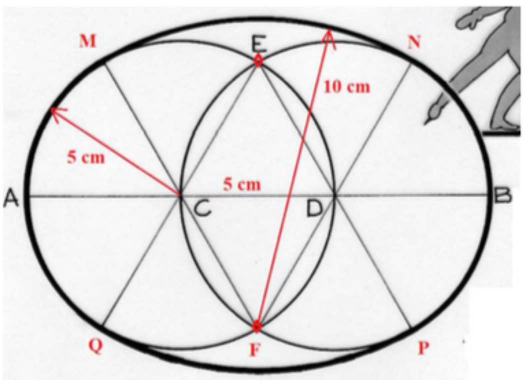
Le volume total de ce solide vaut :

$$7 + 3\,\pi + \frac{4}{3}\,\pi = 7 + \frac{13}{3}\,\pi$$

Le volume de ce solide vaut $7 + \frac{13}{3}\,\pi \approx 20{,}614\ \mathrm{m}^3$.

Exercice 13 (secondes GT) – *Hopla, ça patine !* – 10 points –

Figure :
On construit les triangles équilatéraux CDE et CDF
de base CD=5 cm.
Les arcs de cercles MN, NP, PQ et QM ont pour centres respectifs F ; D ; E et C et pour rayons respectifs 10 cm ; 5 cm ; 10 cm et 5 cm.
Voir figure en annexe

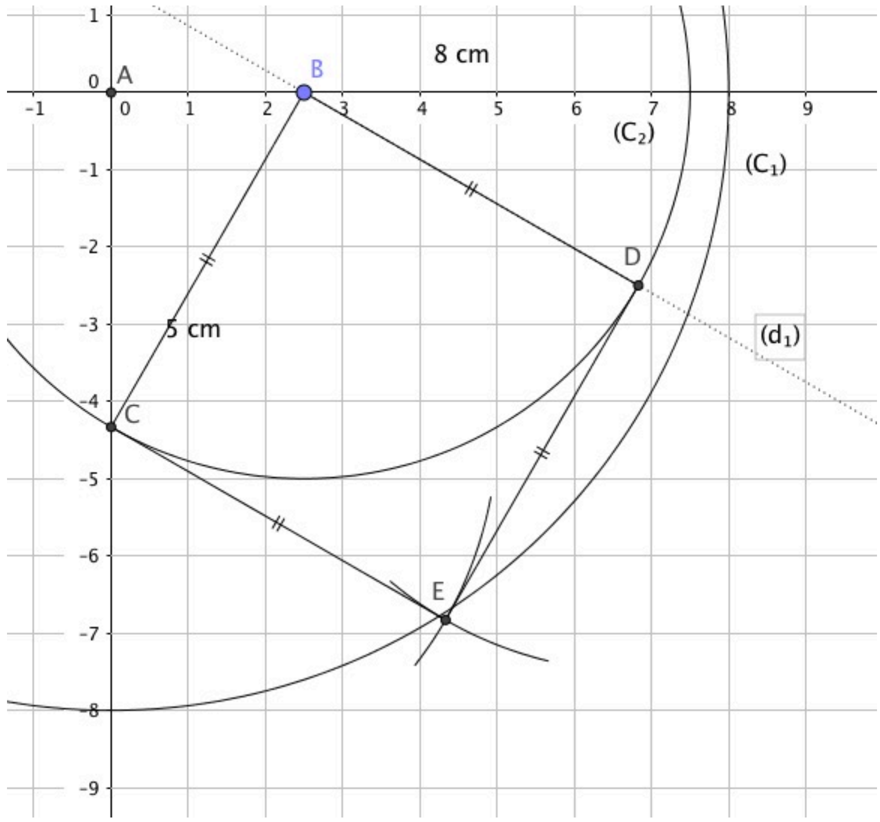


Calcul de la longueur de la barrière de protection :
L'arc de cercle MN est le sixième de la longueur d'un cercle de rayon 20 m ; il est égal à l'arc de cercle QP.
L'arc de cercle MQ est égal à un tiers de la longueur d'un cercle de rayon 10 m ; il est égal à l'arc de cercle NP.
La longueur de la barrière de protection est en mètres :

$$2 \times \frac{40\pi}{6} + 2 \times \frac{20\pi}{3} = \frac{80\pi}{3} \approx 83{,}78$$

La barrière mesure environ 83,78 m.

Exercice 13 (secondes Pro) – *Au quart de tour* – 10 points –

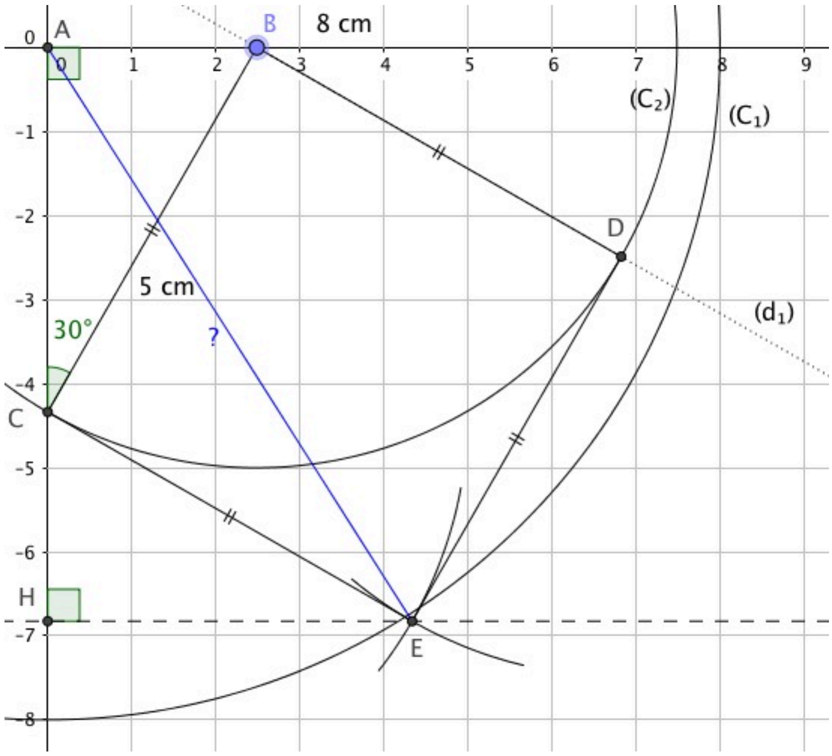


Voici le programme de construction pour reproduire cette figure dans Géogébra :

1. Placer le point A (0 ; 0).
2. Tracer le cercle (C_1) de centre A et de rayon 8 cm.
3. Placer un point B sur l'axe des abscisses (Point sur Objet), il peut avoir comme coordonnées B (2,5 ; 0) par exemple.
4. Tracer le cercle (C_2) de centre B et de rayon 5 cm.
5. Placer le point C, point d'intersection de l'axe des ordonnées et du cercle (C_2).
6. Tracer le segment [BC].
7. Tracer la droite (d_1) perpendiculaire au segment [BC] passant par B, elle coupe le cercle (C_2) au point D.
8. Construire le carré BCED de côté 5 cm en traçant deux cercles de centres C et D et de rayons 5 cm par exemple.

En déplaçant le point B, on remarque que dans de nombreux cas de figure, le point E reste à l'intérieur du cercle (C_1) mais ce n'est pas le cas par exemple pour le point B (2,5 ; 0).

Nous pouvons prouver que le point E est à l'extérieur du cercle de rayon 8 cm dans le cas particulier où $\widehat{ACB}$= 30°



En utilisant la trigonométrie pour les valeurs particulières de AC, CH et HE, et le théorème de Pythagore dans le triangle AHE rectangle en H, on obtient :

$$\mathrm{AE}^2 = (\mathrm{AC} + \mathrm{CH})^2 + \mathrm{HE}^2$$

$$\mathrm{AE}^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\mathrm{AE}^2 = \frac{25}{4}\left(\left(\sqrt{3}+1\right)^2 + 3\right)$$

$$\mathrm{AE}^2 = \frac{25}{4}\left(3 + 1 + 2\sqrt{3} + 3\right)$$

$$\mathrm{AE}^2 = \frac{25}{4}\left(7 + 2\sqrt{3}\right) \approx 65{,}38 > 64$$

Annexe Exercice 13 (secondes GT)