Mathematik Ohne Grenzen

Probewettbewerb Dezember 2012

- **Für jede Aufgabe, auch für nicht gelöste, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.**
- **Auch Teillösungen werden berücksichtigt.**
- **Die Sorgfalt der Darstellung wird mitbewertet.**

Mathématiques SANS Frontières

Aufgabe 1
7 Punkte

Tour de chien

Verfasst den Lösungstext in einer der vier Fremdsprachen im Umfang von mindestens 30 Wörtern.

Mon chien et moi partons ensemble pour faire le tour du lac dans le même sens.
Nous empruntons le même chemin, chacun à une vitesse constante.
Mais mon chien va bien plus vite que moi et il me dépasse une fois avant que nous n'arrivions au même instant à notre point de départ.

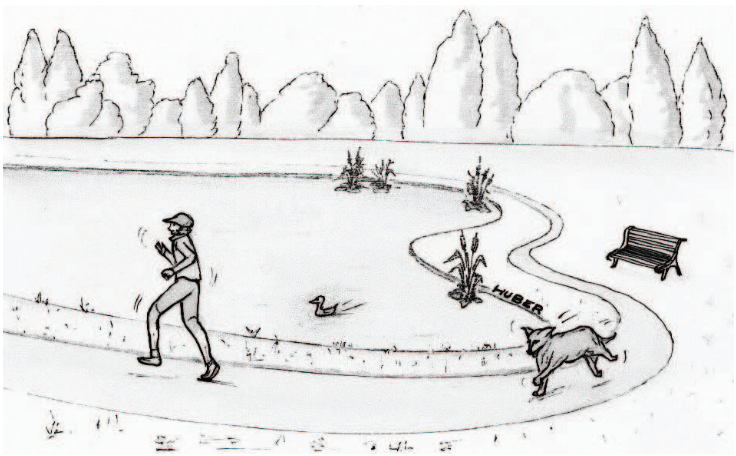
Et si mon chien avait tourné autour du lac à la même vitesse, mais dans l'autre sens, combien de fois m'aurait-il croisé ? Expliquer.

My dog and I set out together to go round the lake. We left at the same time from the same starting point, we both took the same path in the same direction and we travelled at a constant speed.
But my dog goes much faster than I do and he passed me once before we arrived back at the same time at the starting point.

What if my dog had gone round the lake at the same speed but in the other direction, how many times would he have passed me? Explain your answer.

Mi perro y yo salimos juntos y en el mismo sentido para dar la vuelta al lago.
Tomamos el mismo camino, cada uno a una velocidad constante.
Pero mi perro va bastante más rápido que yo y me adelanta una vez antes de que lleguemos los dos, en el mismo instante, a nuestro punto de partida.

Y si mi perro hubiese dado vueltas alrededor del lago a la misma velocidad, pero en sentido contrario, ¿cuántas veces me cruzaría con él? Explícalo.



Il mio cane ed io ci avviamo assieme per fare il giro del lago nel medesimo senso.
Imbocchiamo il medesimo cammino, ciascuno con una velocità costante.
Il mio cane, però, è più veloce di me e mi supera una volta prima che si arrivi assieme nello stesso istante al punto della nostra partenza.

E se il mio cane avesse girato attorno al lago alla stessa velocità precedente, ma in senso inverso, quante volte mi avrebbe incrociato? Spiegate la risposta.

Aufgabe 2
5 Punkte

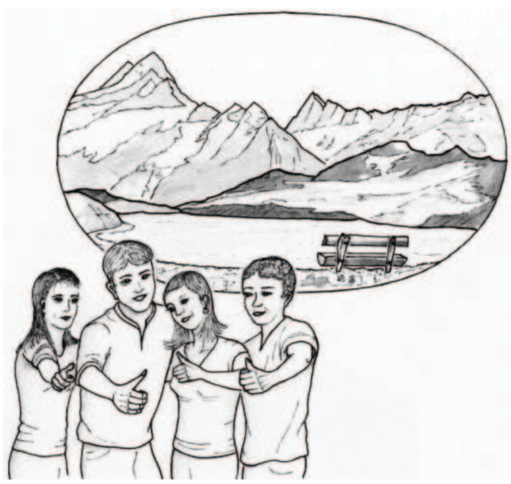
Abrechnung

Die vier Freunde Luise, Milena, Julius und Christoph kehren aus einem gemeinsamen Urlaub mit dem Auto zurück und berechnen ihre Ausgaben.

Luise hat das Benzin bezahlt: 96 €.
Milena hat die Autobahngebühren bezahlt: 42 €.
Julius hat die Verpflegung für alle bezahlt: 18 €.
Christoph hat Julius 15 € geliehen, der damit ein Geschenk für seine Mutter gekauft hat.

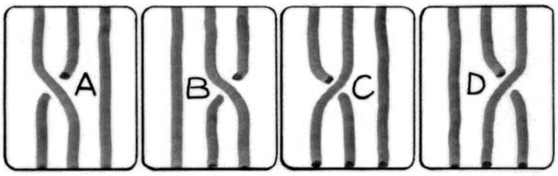
Die vier Freunde möchten sich die Unkosten gerecht aufteilen, und zwar mit einem Minimum an Geldübergaben.

Erklärt, wie die vier Freunde vorgehen müssen.



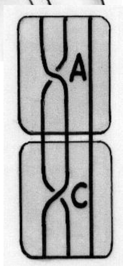
Aufgabe 3
7 Punkte

Das ABC des Flechtens



Cindy und Pauline besitzen eine programmierbare Maschine, die alle möglichen Zöpfe mit drei Strähnen flechten kann.

Die Zöpfe erhält man, wenn man eine Folge von Operationen aus den vier abgebildeten Vorlagen A, B, C, D ausführt:

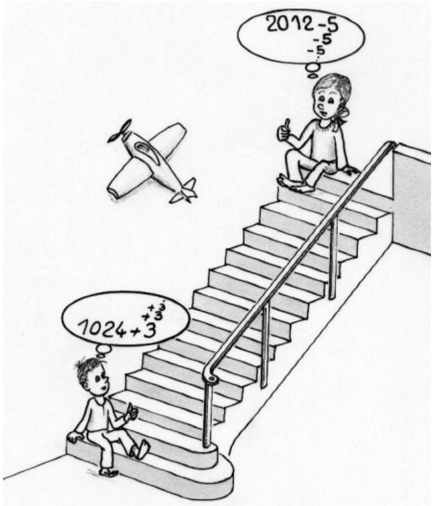


Die beiden haben festgestellt, dass die Vorlage C die Vorlage A aufhebt, da die Folge AC drei freie, parallele Fäden produziert, wenn man sie in die Länge zieht.

Schreibt alle Folgen aus zwei Vorlagen auf, die sich aufheben.

Pauline hat per Zufall die Folge **DDACBAAACDDCABABD** auf ihrer Tastatur getippt.

Gebt eine Kombination aus fünf Buchstaben an, die den Zopf von Pauline auflöst, wenn man sie hinter die angegebene Buchstabenfolge tippt.



Aufgabe 4
5 Punkte

Plus und Minus

Michaela und Michael zählen gleichzeitig und im gleichen Rhythmus:

Michaela beginnt bei 2012 und subtrahiert immer 5: „2012, 2007, 2002, 1997 …“.

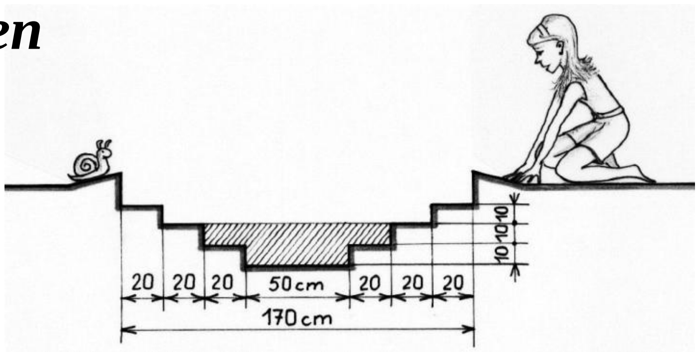
Michael beginnt bei 1024 und addiert immer 3: „1024, 1027,1030, 1033 …“.

Welche Zahlen, die sie gleichzeitig aufsagen, haben den kleinsten Abstand voneinander?

Begründet eure Antwort.

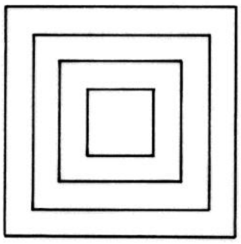
Aufgabe 5
7 Punkte

Nach dem Regen



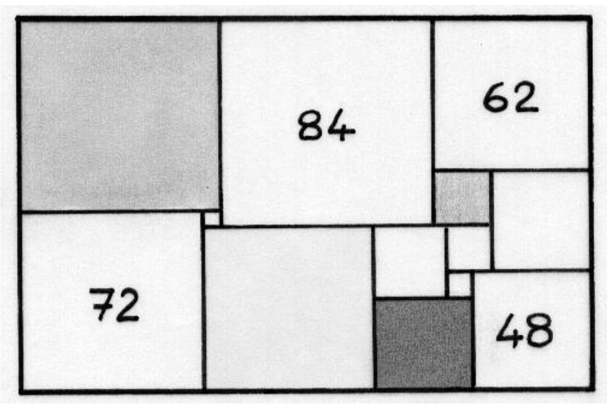
Coralie hat ein stufenförmiges Wasserbecken konstruiert. Der Boden ist ein Quadrat mit 50 cm Seitenlänge.

Die drei Stufen haben jeweils eine Höhe von 10 cm und eine Breite von 20 cm. Coralie baut dieses Wasssserbecken so in ihren Garten ein, dass der Boden waagerecht ist. Plötzlich zieht ein Gewitter auf und ein Platschregen setzt ein.



Nach dem Regen scheint die Sonne wieder und Coralie stellt fest, dass das aufgefangene Wasser im Becken bis zur zweiten Stufe reicht.

Wie groß ist das Wasservolumen in der Einheit Liter, das pro Quadratmeter während des Gewitters gefallen ist? Begründet eure Antwort.



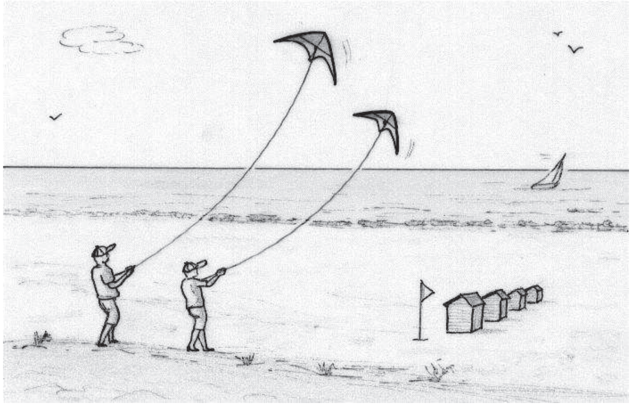
Aufgabe 6
5 Punkte

Millimetergenau

Die nebenstehende Figur ist ein Rechteck, das aus 13 Quadraten zusammensetzt wurde.

Die vier abgebildeten ganzen Zahlen geben die Seitenlänge des jeweiligen Quadrates in der Einheit Millimeter an. Die Seitenlängen der übrigen Quadrate sind in der Einheit Millimeter ebenfalls ganzzahlig und alle voneinander verschieden.

Findet die Seitenlänge der anderen Quadrate heraus und zeichnet die Figur in Originalgröße. Schreibt in jedes Quadrat dessen Seitenlänge.



Aufgabe 7
7 Punkte

Zwillingsdrachen

Zeichnet ein gleichseitiges Dreieck ABC, das den Umkreis C mit Mittelpunkt O und Radius 8 cm hat. Zeichnet die Gerade d, die durch O verläuft und parallel zur Geraden durch B und C ist.

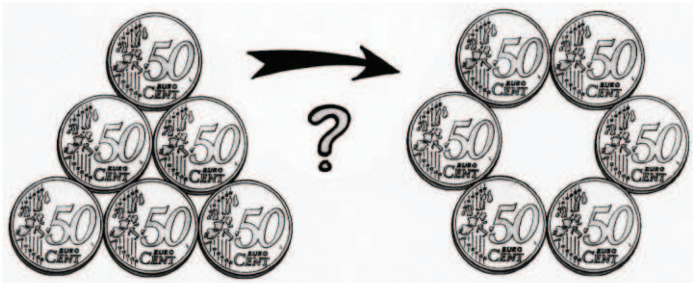
P sei ein Punkt einer Seite des Dreiecks ABC. Die Senkrechte zu d durch P schneidet den Kreis in E und F.

M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EP}$ und N sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{FP}$.

Zeichnet Punkt für Punkt die Kurven, die durch die Punkte M und N beschrieben werden, wenn der Punkt P auf den drei Seiten des Dreiecks ABC wandert.

Aufgabe 8
5 Punkte

Taler, Taler du musst wandern…



Mit sechs identischen Münzen, die auf einem Tisch liegen, wird ein Dreieck gebildet (linke Figur der Abbildung).

Bernhard hat es geschafft in fünf Zügen daraus ein Sechseck zu bilden (rechte Figur der Abbildung).

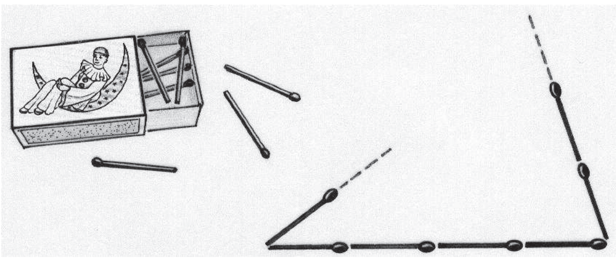
Ein Zug besteht darin, eine Münze so zu verschieben, dass dabei keine andere Münze bewegt wird und die Münze selbst anschließend zwei andere Münzen berührt.

Susanne hat eine Lösung mit nur vier Zügen gefunden.

Zeichnet die 6 aufeinanderfolgenden Positionen der fünfzügigen Lösung von Bernhard oder - noch besser - die 5 aufeinanderfolgenden Positionen der vierzügigen Lösung von Susanne.

Aufgabe 9
7 Punkte

Geht's oder geht's nicht?



Auf dem Tisch liegen 21 Streichhölzer derselben Länge.

Sie werden so aneinandergelegt, dass sie die Seiten eines Dreiecks bilden.

Wie viele verschiedene Dreiecke kann man auf diese Weise legen, wenn man für jedes Dreieck jeweils alle 21 Streichhölzer verwendet?

Schreibt alle möglichen Lösungen auf.

Aufgabe 10
10 Punkte

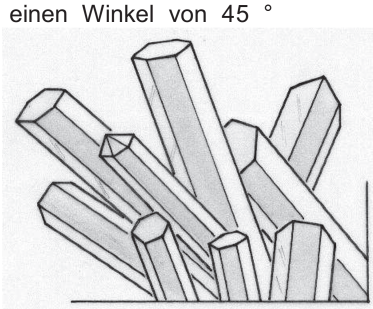
Kristalle

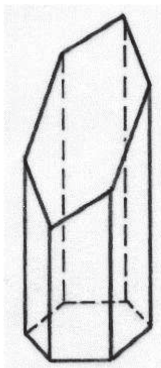
Quarzkristalle haben oft die Form eines Prismas mit sechseckiger Grundfläche.

Die Grundfläche des unten abgebildeten Kristalls ist ein regelmäßiges Sechseck mit einer Seitenlänge von 2 cm.

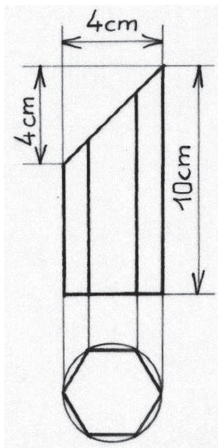
Oben wurde das Prisma schräg abgeschnitten, so dass die Schnittebene mit der Grundfläche einen Winkel von 45 ° bildet.

Zeichnet ein Netz des Mantels sowie die beiden sechseckigen Deckflächen in wahrer Größe.





Schrägbild



Seitenansicht

Grundriss

Klassenstufe 10

Aufgabe 11 – 5 Punkte

Bedingte Freiheit

Ein Gefangener bittet um Gnade.

Sein Gefängniswächter macht ihm Hoffnung auf die Freiheit: Er bringt ihm zwei Urnen sowie 12 weiße und 12 schwarze Kugeln.

Der Gefangene soll diese 24 Kugeln auf die beiden Urnen verteilen.

Dann wird der Wächter eine der Urnen per Zufall auswählen und aus dieser Urne ebenfalls zufällig eine Kugel ziehen.

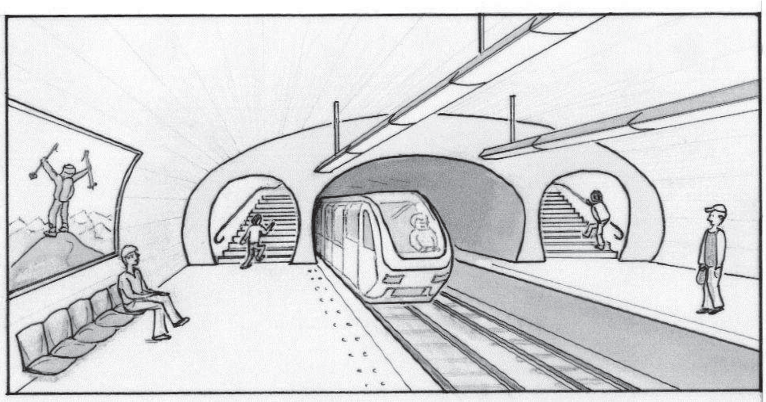
Wenn die Kugel weiß ist, soll der Gefangene freigelassen werden.

Wie muss der Gefangene die Kugeln auf die Urnen verteilen, damit seine Chance auf Freilassung möglichst groß ist?

Berechnet für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit, dass er frei kommt.

Aufgabe 12 – 7 Punkte

Treppauf



Während Lukas am Bahnsteig der Metro auf seine Freundin Julia wartet, beobachtet er, wie die Leute die Treppe zum Ausgang hinaufgehen. Er überlegt, auf wie viele Arten man dies tun kann, wenn man bei jedem Schritt entweder eine oder zwei Stufen nimmt:

„Für eine Treppe mit nur zwei oder drei Stufen ist die Antwort einfach. Und für eine Treppe mit vier Stufen? Nun ja: für den ersten Schritt hat man zwei Möglichkeiten, und danach bleiben noch entweder zwei oder drei Stufen…“

- „Träumst du, Lukas?“, fragt Julia, die er gar nicht kommen gesehen hat. „Schnell, wir sind spät dran!“

Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Treppe mit 13 Stufen in der beschriebenen Art hinaufzugehen?

Stellt euren Gedankengang dar.

Aufgabe 13 – 10 Punkte

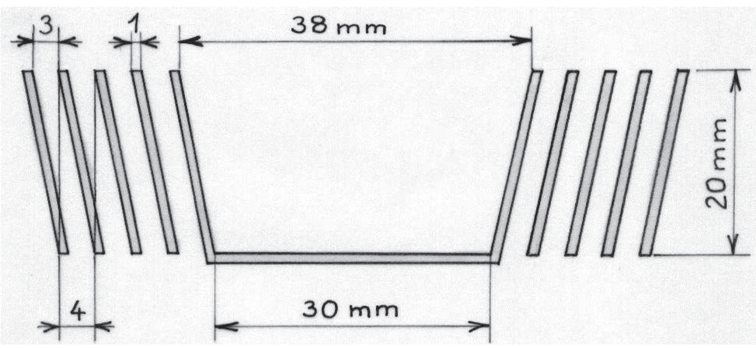
Teleskopisch

Nicole ist vorausschauend: sie hat immer ihren faltbaren Plastikbecher in ihrer Handtasche, für den Fall, dass sie ihn brauchen könnte. Nicoles Becher besteht aus einer Grundplatte und fünf kegelstumpfförmigen Elementen. Diese fünf Elemente lassen sich ineinanderschieben und bilden so ein dichtes Gefäß (Abb. 1), das man nach Gebrauch wieder zusammenfalten kann (Abbildung 2).

Abb. 1

Abb. 2

Das untenstehende Schema stellt das zusammengefaltete Gefäß dar.



Die Elemente haben alle die gleiche Wandstärke und eine Höhe von 20 mm.

Ihre Radien nehmen von Element zu Element um 4 mm zu. Das kleinste der fünf Elemente hat Innendurchmesser von 30 und 38 mm.

Gebt die Innenhöhe des aufgefalteten Bechers an.

Bestimmt dann die ungefähre Flüssigkeitsmenge, die man in den Becher füllen kann.

Begründet jeweils euer Ergebnis.

Zur Erinnerung: Die Formel zur Berechnung des Volumen eines Kegelstumpfes mit den Radien r und R und der Höhe h lautet:

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2)$$

Mathématiques SANS Frontières

Mathematik ohne Grenzen - Probewettbewerb 2012-2013
Lösungshinweise

Aufgabe 1 – *Tour de chien*, 7 Punkte

Mein Hund und ich bewegen uns mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Auf der Hälfte des Weges überholt er mich. Er läuft eineinhalb Runden, während ich eine halbe Runde um den See gehe. Seine Geschwindigkeit ist also die dreifache meiner Geschwindigkeit.
Wenn er entgegengesetzt gelaufen wäre, hätten wir uns zum ersten Mal nach einer Viertelrunde getroffen. Er wäre dann eine Dreiviertelrunde gelaufen. Wir wären uns noch zweimal nach jeweils einer weiteren Viertelrunde begegnet, bevor wir gemeinsam angekommen wären. Mein Hund hätte also **drei Mal** meinen Weg gekreuzt.

Aufgabe 2 – *Abrechnung*, 5 Punkte

Die Kosten betragen für jeden 39 €. Nach Verrechnung der Auslagen bekommt Luise noch 57 € und Milena 3 €, während Julius noch 21 € und Christoph 39 € bezahlen muss. Da Julius Christoph noch 15 € schuldet, zahlt er 36 € an die Mädchen, so dass Christoph 15 € weniger, also 24 € zu zahlen hat. Dies lässt sich durch drei Geldübergaben regeln:
Julius gibt Luise 36 €, Christoph gibt Luise 21 € und Milena 3 €
oder: **Julius gibt Luise 33 € und Milena 3 €**, **Christoph gibt Luise 24 €.**

Aufgabe 3 – *Das ABC des Flechtens*, 7 Punkte

Die Folgen aus zwei Vorlagen, die sich aufheben, sind: **AC, CA, BD** und **DB**.
Man kann den Zopf von Pauline folgendermaßen vereinfachen:
D(~~D~~(~~AC~~)~~B~~)AA(~~AC~~)D(~~D~~(~~CA~~)~~B~~)A(~~BD~~) = DAADA.
Um diesen aufzulösen muss man die jeweiligen „Inversen“ tippen, und zwar in umgekehrter Reihenfolge: **CBCCB**.

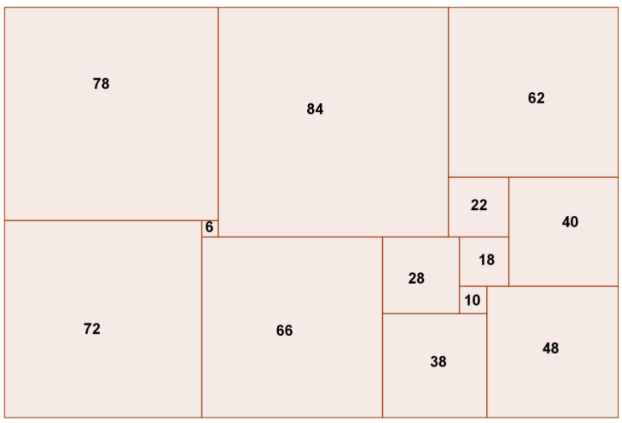
Aufgabe 4 – *Plus und Minus*, 5 Punkte

Die Lösung der Gleichung $2012-5n = 1024+3n$ ergibt $n = 123{,}5$.
Man probiert daher $n = 123$ und $n = 124$ aus.
Die Zahlen, die einander am nächsten sind, sind **1397 und 1393** oder **1392 und 1396**.

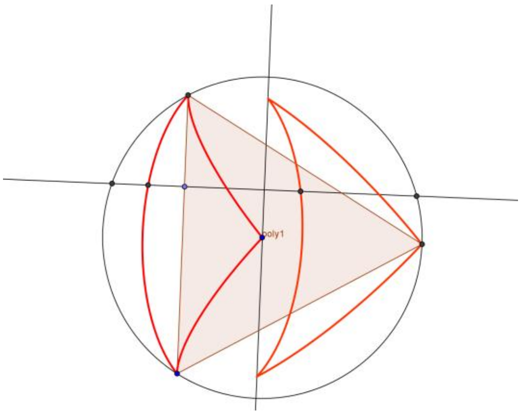
Aufgabe 5 – *Nach dem Regen*, 7 Punkte

Die Berechnung des Wasservolumens im Becken ergibt 106 000 cm^3 = 106 l.
Das Wasservolumen pro Quadratmeter ergibt sich aus der gesamten Bodenfläche des Beckens: $(1{,}7\ \text{m})^2 = 2{,}89\ \text{m}^2$.
Man findet also ungefähr **36,7 l Wasser pro Quadratmeter** vor.

Aufgabe 6 – *Millimetergenau*, 5 Punkte

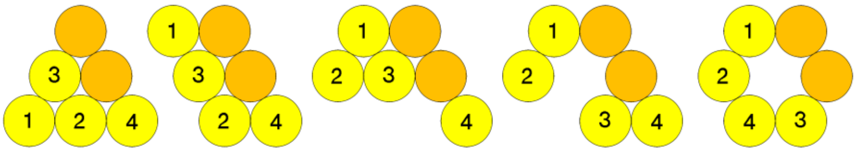


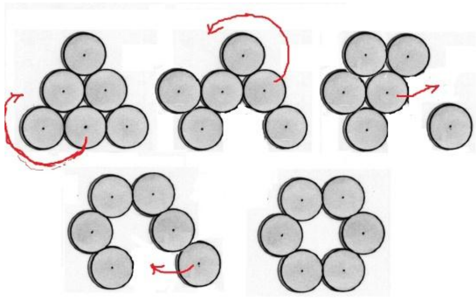
Aufgabe 7 – *Zwillingsdrachen*, 7 Punkte



Aufgabe 8 – *Taler, Taler, du musst wandern*, 5 Punkte

Hier zwei Lösungen in 4 Zügen:

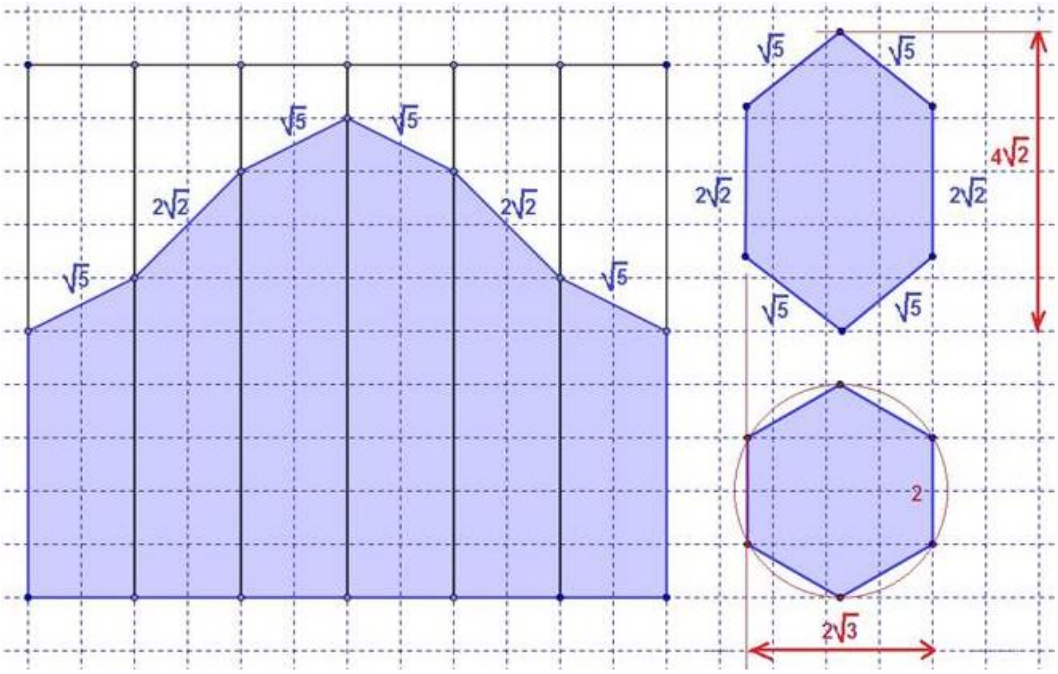




Aufgabe 9 – *Geht's oder geht's nicht?*, 7 Punkte

Die Aufgabe besteht darin, alle Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen zu finden, deren Umfang 21 cm beträgt. Dabei muss die Dreiecksungleichung beachtet werden.
Es gibt 12 Lösungen: **(10 ; 10 ; 1), (10 ; 9 ; 2), (10 ; 8 ; 3), (10 ; 7 ; 4), (10 ; 6 ; 5), (9 ; 9 ; 3), (9 ; 8 ; 4), (9 ; 7 ; 5), (9 ; 6 ; 6), (8 ; 8 ; 5), (8 ; 7 ; 6) und (7 ; 7 ; 7).**

Aufgabe 10 – *Kristalle*, 10 Punkte



Die Berechnung der Seitenlängen ist nicht verlangt; diese sind lediglich zur Erleichterung der Korrektur angegeben.

Aufgabe 11 – *Bedingte Freiheit*, 5 Punkte

Wenn jede Urne gleich viele weiße und schwarze Kugeln enthält, beträgt die Wahrscheinlichkeit auf Freiheit $\frac{1}{2}$.

Bei jeder anderen Aufteilung ist die Wahrscheinlichkeit auf Freiheit größer als $\frac{1}{2}$, wenn der Wärter die „richtige" Urne auswählt, und kleiner als ½, wenn er die „falsche" Urne auswählt.
Wenn der Gefangene eine einzige weiße Kugel in die eine Urne und alle anderen Kugeln in die andere Urne legt, betragen die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{1}$ und $\frac{11}{23}$.
Dies ist die für den Gefangenen günstigste Aufteilung.

Die Wahrscheinlichkeit auf Freiheit ist in diesem Fall: $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{23}=\frac{17}{23}$**, also fast 74%**.

Aufgabe 12 – *Treppauf*, 7 Punkte

Sobald man die n-te Stufe erreicht, hat man die (n-1)-te oder die (n-2)-te verlassen, je nachdem, ob man einen kleinen oder großen Schritt gemacht hat.
Wenn man die Anzahl der Möglichkeiten, die n-te Stufe zu erreichen, mit u_n bezeichnet, erhält man den rekursiven Zusammenhang $\boxed{u_n = u_{n-1} + u_{n-2}}$.
Die nachfolgenden Terme resultieren aus den beiden Anfangswerten $u_1 = 1$ und $u_2 = 2$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**
u_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	**377**

Man erkennt die Fibonnaccifolge.

Aufgabe 13 - *Teleskopisch*, 10 Punkte

Man beweist mit dem Strahlensatz, dass jedes Element ein Viertel der Höhe des vorherigen bedeckt, wenn der Becher auseinandergefaltet ist. Die Innenhöhe des Bechers beträgt damit 80 mm.

Um das Fassungsvermögen des Bechers abzuschätzen, kann man den Becher an einen Kegelstumpf annähern.

Die Formel ergibt dann: $V \approx \frac{\pi\times 80}{3}\left(15^2+15\times 35+35^2\right)$ $\approx$ **165 457 mm³ ≈ 165 cm³**.

Die (genauere) Berechnung über die einzelnen Elemente ergäbe 164 703 mm^3

Mathematik ohne Grenzen - Probewettbewerb 2012-2013
Bewertungsvorschläge

Mathématiques SANS Frontières

Aufgabe 1 – *Tour de chien*, 7 Punkte

3 Punkte für die sprachliche Qualität; **4 Punkte** für Antwort, Argumentation und Erklärung, davon **2 Punkte** für die richtige Antwort.

Aufgabe 2 – *Abrechnung*, 5 Punkte

5 Punkte für eine der beiden möglichen Lösungen in 3 Geldübergaben mit anschließender Begründung;
4 Punkte, wenn eine der der beiden möglichen Lösungen in 3 Geldübergaben ohne Begründung oder Erklärung angegeben ist; **2 Punkte** für eine Lösung in 4 Geldübergaben, von denen eine die direkte Rückerstattung der 15 € von Jules an Cissé ist.

Aufgabe 3 – *ABC des tresses*, 7 Punkte

Punktevorschlag: 2 Punkte für die drei zusätzlichen Kombinationen, die sich gegenseitig aufheben (CA, BD et DB);
5 Punkte für die Antwort **CBCCB**. Bei teilweise falscher Antwort, aber richtiger Vorgehensweise (Vereinfachung der Ausgangsfolge; umgekehrte Reihenfolge der „Inversen“ bei der Antwort): bis zu **3 Punkten**, wenn die vorgeschlagene Lösung 5 Operationen enthält; bis zu **2 Punkten**, wenn die vorgeschlagenen Lösung mehr als 5 Operationen enthält.

Aufagbe 4 – *Plus und Minus*, 5 Punkte

3 Punkte für die beiden korrekten Antworten; **2 Punkte**, wenn nur eine der Lösungen angegeben ist; **2 Punkte** für die Erklärungen.

Aufgabe 5 – *Nach dem Regen*, 7 Punkte

4 Punkte für die Berechnung des Wasservolumens im Becken (3 Punkte für die Berechnung, 1 Punkt für die Umrechnung in Liter); **3 Punkte** für die Berechnung des Wasservolumens pro m^2 (die man unterteilen könnte in die Berechnung der Bodenfläche des Beckens, die auszuführende Division und die Angabe der Lösung).

Aufgabe 6 – *Millimetergenau*, 5 Punkte

5 Punkte für die richtige Darstellung des kompletten Rechtecks; wenn Quadrate fehlen, könnte man pro gefundenem Quadrat einen Drittelpunkt zählen und dann auf halbe Punkte genau runden (z. B. 1,5 Punkte für 4 gefundene Quadrate).

Aufgabe 7 – *Zwillingsdrachen*, 7 Punkte

7 Punkte, die je nach Qualität des Ergebnisses vergeben werden und die man wie folgt verteilen kann:
2 Punkte für jede durchlaufene Seite des Dreiecks und **1 Punkt** für die Verbindung der Kurvenpunkte zu jeweils einem geschlossenen Drachen. Wenn nur einer der beiden Drachen dargestellt ist: nicht mehr als 3 Punkte.

Aufgabe 8 – *Taler, Taler, du musst wandern*, 5 Punkte

5 Punkte für eine richtige Lösung in 4 Schritten (5 Positionen); eine Lösung in 5 Schritten braucht in diesem Fall nicht angegeben zu werden; **2 Punkte**, wenn „nur“ eine richtige Lösung in 5 Schritten (6 Positionen) gefunden wurde.

Aufgabe 9 – *Geht's oder geht's nicht* ?, 7 Punkte

7 Punkte für alle 12 Lösungen; **5 Punkte** wenn nur wenige Lösungen „vergessen“ wurden; **2 oder 3 Punkte**, wenn nur wenige Lösungen gefunden wurden.

Aufgabe 10 – *Kristalle*, 10 Punkte

6 Punkte für das Netz des Mantels, **1 Punkt** für die regelmäßige sechseckige Grundfläche, **3 Punkte** für die Deckfläche. Punktabzug bei kleinen Fehlern (Gesamtbild richtig, aber Längenfehler).

Aufgaben Klasse 10

Aufgabe 11 – *Bedingte Freiheit*, 5 Punkte

3 Punkte für die richtige Aufteilung und **2 Punkte** für die korrekte Berechnung (ausgehend von der vorgeschlagenen Aufteilung) der zugehörigen Wahrscheinlichkeit.
Bemerkung: Eine Begründung dafür, dass es sich um die optimale Aufteilung handelt, ist nicht verlangt.

Aufgabe 12 – *Treppauf*, 7 Punkte

4 Punkte für die richtige Antwort (2 oder 3 Punkte bei Rechenfehler, aber ansonsten richtigem Gedankengang) und **3 Punkte** für die Argumentation.

Aufgabe 13 - *Teleskopisch*, 10 Punkte

5 Punkte für die Innenhöhe des Bechers (davon **2 Punkte** für die Erklärung); **5 Punkte** für die Schätzung des Volumens unter Verwendung der vorherigen Ergebnisse (davon **3 Punkte** für die Methode und **2 Punkte** für die zugehörige Rechnung).

Die Bewertungsvorschläge stellen eine Empfehlung dar, von der in begründeten Fällen auch abgewichen werden kann.